详细解答

STEP III 1994，第 6 题

纯数学 · 阿根图上的旋转

> **STEP III 1994，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q6

关键思路

以点 p 为中心、转角为 θ 的旋转（rotation）就是映射 $z \mapsto p + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-p)$：先把 p 移到原点，旋转，再移回去。把若干个这样的映射复合（compose）起来，结果必定形如 $z \mapsto \lambda z + \mu$，而“$P_{\text{最后}} = P_1$ 对每一个 P_1 都成立”就表示这个映射是恒等映射（identity），所以 $\lambda = 1$ 且 $\mu = 0$。余下的工作，就是从几何角度解读这两条等式。

解答

求 z_5

正方向的四分之一圈旋转相当于乘以 i，所以把 P_1 绕 A 旋转便得

$$z_2 = a + \mathrm{i}(z_1 - a) = (1-\mathrm{i})a + \mathrm{i}z_1.$$

同理，$z_3 = (1-\mathrm{i})b + \mathrm{i}z_2$，$z_4 = (1-\mathrm{i})c + \mathrm{i}z_3$，以及 $z_5 = (1-\mathrm{i})d + \mathrm{i}z_4$。逐步代回去，

$$\begin{aligned} z_5 &= (1-\mathrm{i})(d + \mathrm{i}c + \mathrm{i}^2 b + \mathrm{i}^3 a) + \mathrm{i}^4 z_1 \\ &= (1-\mathrm{i})(d - b + \mathrm{i}(c-a)) + z_1. \end{aligned}$$

P_5 何时回到 P_1？

四个四分之一圈合起来是一整圈，所以 z_1 的系数恰好是 1，而

$$z_5 - z_1 = (1-\mathrm{i})(d - b + \mathrm{i}(c-a)),$$

这完全与 z_1 无关。复合映射是一个纯粹的平移（translation）。由于 $1-\mathrm{i}\neq 0$,

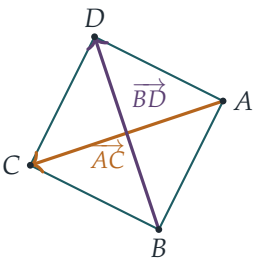
$$\begin{aligned} z_5 = z_1 \text{ 对所有} z_1 &\iff d-b+\mathrm{i}(c-a)=0 \\ &\iff \mathrm{i}(c-a)=b-d \\ &\iff a-c=\mathrm{i}(b-d), \end{aligned}$$

其中最后一步是把两边同乘以 $-\mathrm{i}$（而 $-\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=1$）。每一步都可逆，所以这就是所要求的“若且仅若”（if and only if）。（如果条件不成立，平移量便不是零，于是无论怎样选取 P_1，都有 $P_5\neq P_1$。）

> **想一想** $a-c=\mathrm{i}(b-d)$ 说明了图形 $ABCD$ 有甚么特点?

乘以 -1：条件变成 $c-a=\mathrm{i}(d-b)$。这里 $c-a$ 代表向量 $\overrightarrow{AC}$，而 $d-b$ 代表向量 $\overrightarrow{BD}$。乘以 i 会把向量旋转 $\pi/2$ 而不改变其长度。所以：

$\overrightarrow{AC}$ 是 $\overrightarrow{BD}$ 沿正方向转过一个直角所得；也就是说，四边形 $ABCD$ 的对角线（diagonal）AC 与 BD 长度相等且互相垂直，而 AC 是由 BD 逆时针转四分之一圈而得。



在图中的例子里，$\overrightarrow{BD}=-1+3\mathrm{i}$，而 $\overrightarrow{AC}=-3-\mathrm{i}=\mathrm{i}(-1+3\mathrm{i})$。定向（orientation）是有关系的：顶点按顺时针次序标记的正方形满足这个条件，但按逆时针次序标记的则不满足（那时 $\overrightarrow{AC}=-\mathrm{i}\,\overrightarrow{BD}$）。

三次转角为 θ 的旋转

设 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$。与之前完全一样，每一步都是 $z\mapsto(1-w)p+wz$，所以

$$\begin{aligned} z_4 &= (1-w)c+w\big((1-w)b+w\big((1-w)a+wz_1\big)\big) \\ &= (1-w)\big(c+wb+w^2a\big)+w^3z_1. \end{aligned}$$

这就是 $\lambda z_1+\mu$，其中 $\lambda=w^3$，$\mu=(1-w)(c+wb+w^2a)$。它对所有 z_1 都等于 z_1，若且仅若 $\lambda=1$ 且 $\mu=0$（取 $z_1=0$ 得 $\mu=0$，再取 $z_1=1$ 得 $\lambda=1$）。

转角 $\circ$ $w^3=1$ 表示 3θ 是 2π 的倍数。我们把 $\theta\neq 0$ 理解为“不是整数圈”，所以 $w\neq 1$；因此 w 是一个非实数的三次单位根（cube root of unity），而

$$\theta=\pm\tfrac{2\pi}{3}\pmod{2\pi}.$$

各点。由于 $w \neq 1, \mu = 0$ 变成 $c + wb + w^2 a = 0$。乘以 w 并利用 $w^3 = 1$，得 $a + w^2 b + wc = 0$；又因为 $1 + w + w^2 = 0$（因 $w^3 = 1$，$w \neq 1$），我们可以改写 $a = -(w + w^2)a$，所以

$$w(c-a) + w^2(b-a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c - a = -w\,(b-a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}(b-a) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi)}(b-a).$$

> **想一想** 当 $\theta = \pm 2\pi/3$ 时，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\pi)}$ 是甚么？

当 $\theta = 2\pi/3$ 时，它是 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/3}$；当 $\theta = -2\pi/3$ 时，它是 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$（因为 $\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$）。所以 $\overrightarrow{AC}$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 转过 $\mp\pi/3$ 所得，长度不变：ABC 是**等边**（equilateral）三角形，当 $\theta = 2\pi/3$ 时 A, B, C 按**顺时针**次序排列，当 $\theta = -2\pi/3$ 时则按**逆时针**次序排列。反过来，以上每一步都可逆，所以这些条件也能推出 $\mu = 0$。

由于 A, B, C 位于单位圆上，这个圆就是三角形的外接圆（circumcircle），而等边三角形的外心（circumcentre）就是它的中心，所以三个顶点平均分布在 $|z| = 1$ 上。两种情况可以简洁地合并成一句：

$$\theta = \pm\tfrac{2\pi}{3} \pmod{2\pi}, \qquad b = a\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, \quad c = b\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$

用文字来说，三次旋转各转三分之一圈，而 A, B, C 平均分布在单位圆上，其排列方向与旋转方向相反。

验算

- 用电脑随机选取 A, B, C, D，再对随机选取的点施行四次四分之一圈旋转，结果与 z_5 的公式吻合，误差在 10^{-9} 之内；取 $c = a - \mathrm{i}(b-d)$ 时，每个 P_1 都回到原位，而把 c 稍微移动 0.1 之后便不再成立。
- 在单位圆上随机选取 a，并取 $\theta = \pm 2\pi/3$，则 $b = a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$、$c = b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ 对随机的 z_1 都给出 $z_4 = z_1$；把标记次序倒转或改用其他 θ 则不成立。
- 手算：把 $z_1 = 0$ 依次绕顺时针标记的单位正方形 $a = 0$、$b = \mathrm{i}$、$c = 1 + \mathrm{i}$、$d = 1$ 旋转。你会得到 $0 \to 0 \to 1 + \mathrm{i} \to 1 + \mathrm{i} \to 0$。回到原位了。

常见错误

- 把绕 A 的旋转写成 $z \mapsto \mathrm{i}z$，忘记了要先把 A 移到原点。
- 忽略定向：对角线之间的旋转方向，以及 $\theta = \pm 2\pi/3$ 两种情况下三角形各自的排列方向，都是条件的一部分。

STEP 之外

满足 $|\lambda| = 1$ 的映射 $z \mapsto \lambda z + \mu$ 就是平面上保持定向的等距变换（isometry），它们构成一个群（group）。转角可以相加，所以若干个旋转的复合是一个转角为各角总和的旋转；若总和是整数圈，则是一个平移：这就是 $z_5 - z_1$ 结果是常数的原因。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把复数的这种几何观点阐述得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。