详细解答

STEP III 1994，第 5 题

纯数学 · 麦克劳林级数

> **STEP III 1994，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q5

关键思路

把 $\sin^{-1}x$ 求导一次会得到一个平方根，再求导一次，便得到 f'' 与 f' 之间一个不含平方根的关系式。然后利用莱布尼兹定理（Leibniz's theorem），就可以把这一条方程变成所有高阶导数的递推关系（recurrence）。在 $x=0$ 处，大部分的项都会消失，于是得到麦克劳林系数（Maclaurin coefficients）的一个简单递推关系。至于 g，利用对数定律便可把一切化为我们熟悉的 $\ln(1\pm x)$ 的级数。

解答

微分方程

对于 $-1<x<1$，

$$\mathrm{f}'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2},\qquad \mathrm{f}''(x)=-\tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}\cdot(-2x)=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}.$$

把第二式乘以 $1-x^2$，得 $(1-x^2)\mathrm{f}''(x)=x(1-x^2)^{-1/2}=x\mathrm{f}'(x)$，所以

$$(1-x^2)\mathrm{f}''(x)-x\mathrm{f}'(x)=0,$$

这正是所需的结果。

递推关系

利用莱布尼兹定理 $(uv)^{(n)}=\sum_r \binom{n}{r}u^{(r)}v^{(n-r)}$，把这个恒等式求导 n 次。在第一个乘积中，取 $u=1-x^2$。它的各阶导数依次为 $-2x$、-2，之后全为 0，所以只有三项留下来：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)\mathrm{f}''\right]=(1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)}+n(-2x)\mathrm{f}^{(n+1)}+\binom{n}{2}(-2)\mathrm{f}^{(n)}.$$

在第二个乘积中 $u = x$，只有两项留下来：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x\mathrm{f}'\right] = x\mathrm{f}^{(n+1)} + n\mathrm{f}^{(n)}.$$

两式相减，并利用 $2\binom{n}{2} = n(n-1)$，

$$\begin{aligned} 0 &= (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} - (2n+1)x\mathrm{f}^{(n+1)} - (n(n-1)+n)\mathrm{f}^{(n)} \\ &= (1-x^2)\mathrm{f}^{(n+2)} - (2n+1)x\mathrm{f}^{(n+1)} - n^2\mathrm{f}^{(n)}, \end{aligned}$$

这就是所需的结果。它对每个 $n \geq 1$ 都成立，而当 $n = 0$ 时，它就是最初的那条方程。（如果你喜欢，也可以改用归纳法（induction）来证明：把 n 的情形求导一次，再整理各项，便得到 $n+1$ 的情形。这其实是同一个计算，只是逐步进行而已。）

f 的麦克劳林级数

想一想 x 取哪个值，会令这个递推关系容易使用？

代入 $x = 0$。中间的一项消失，而 $1 - x^2 = 1$，所以

$$\mathrm{f}^{(n+2)}(0) = n^2\,\mathrm{f}^{(n)}(0) \qquad (n \geq 0).$$

我们由 $\mathrm{f}(0) = \sin^{-1} 0 = 0$ 和 $\mathrm{f}'(0) = 1$ 出发。

偶数阶导数。由于 $\mathrm{f}(0) = 0$，根据递推关系，每个偶数阶导数在 0 处都等于零。这与我们的预期相符，因为 $\sin^{-1}$ 是奇函数（odd function）。

奇数阶导数。取 $n = 1, 3, 5, \ldots$，

$$\mathrm{f}'''(0) = 1^2, \quad \mathrm{f}^{(5)}(0) = 3^2 \cdot 1^2, \quad \mathrm{f}^{(7)}(0) = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2,$$

而一般地

$$\mathrm{f}^{(2k+1)}(0) = \left(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\right)^2 \qquad (k \geq 1).$$

因此

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1^2}{3!}x^3 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{5!}x^5 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{7!}x^7 + \cdots = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots.$$

x^{2k+1} 的系数可以化简得很整齐。写出 $(2k+1)! = (1 \cdot 3 \cdots (2k-1))(2 \cdot 4 \cdots 2k)(2k+1)$，再约去一个奇数乘积：

$$a_{2k+1} = \frac{\left(1 \cdot 3 \cdots (2k-1)\right)^2}{(2k+1)!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \cdot \frac{1}{2k+1}.$$

由比值审敛法（ratio test）可知，这个级数在 $|x| < 1$ 时收敛，因为 $a_{2k+3}/a_{2k+1} \to 1$。至于它在该范围内确实等于 $\sin^{-1} x$，则可以把 $(1-x^2)^{-1/2}$ 的二项级数（binomial series）逐项积分来确认，所得的系数完全相同。

函数 g

根据对数定律，$\mathrm{g}(x) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$。对于 $|x| < 1$，

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \qquad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots.$$

两者相减时，偶数次幂互相抵消，奇数次幂则变成两倍。所以

$$\mathrm{g}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

（你也许会认出 g 就是 $\tanh^{-1} x$。）

比较系数

想一想 两个系数都有因子 $\frac{1}{2k+1}$。那么还剩下甚么要比较?

对于 $n \geq 1$，x^{2n+1} 的系数在 g 中是 $\dfrac{1}{2n+1}$，而在 f 中是

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

。这 n 个因子 $\frac{2r-1}{2r}$ 每一个都严格介乎 0 与 1 之间，而且因为 $n \geq 1$，这样的因子至少有一个。所以它们的乘积严格小于 1，从而

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n+1}.$$

因此 g 中的系数较大，这正是所需的结果。当 $n = 0$ 时，两个系数都等于 1，这就是题目把这个情形排除在外的原因。

验算

- 在 $x = -\frac{1}{2}$ 处，把级数求和至 x^{59} 一项，得 -0.5235987756，与 $\sin^{-1}(-\frac{1}{2}) = -\pi/6$ 吻合。
- 系数 $1, \frac{1}{6}, \frac{3}{40}, \frac{5}{112}$ 与直接由 $\mathrm{f}^{(n+2)}(0) = n^2 \mathrm{f}^{(n)}(0)$ 生成的系数一致。$\frac{1}{6} < \frac{1}{3}$、$\frac{3}{40} < \frac{1}{5}$、$\frac{5}{112} < \frac{1}{7}$ 这几个比较亦如所述成立。
- 由于 f 的每个系数都不超过 g 中对应的系数，对于 $0 < x < 1$ 应有 $\sin^{-1} x < \tanh^{-1} x$。在 $x = 0.5$ 处：$0.5236 < 0.5493$。

常见错误

- 使用莱布尼兹定理时漏掉 $\binom{n}{2}$ 的一项，以致最后的系数变成 n 而不是 n^2。
- 写成 $\mathrm{f}^{(2k+1)}(0) = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)$ 而漏掉平方。递推关系的每一步都是乘以 n^2，而不是 n。
- 计算麦克劳林系数时，只除以 $(2k)!$ 或 $(2k+1)$，而不是除以 $(2k+1)!$。

STEP 之外

比值 $\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$ 等于 $\binom{2n}{n}/4^n$，而当 n 很大时，它的表现近似于 $1/\sqrt{\pi n}$。这是沃利斯乘积（Wallis's product）和斯特灵公式（Stirling's formula）的推论。$\sin^{-1} x$ 的级数在 $x = 1$ 处同样收敛，其和为 $\pi/2$，但要证明这一点，需要用到阿贝尔定理（Abel's theorem），该定理处理幂级数（power series）在收敛区间（interval of convergence）端点的情况。当一个函数的各阶导数满足某条微分方程时，便可推出其系数的递推关系；这就是常微分方程（ODE）的级数解法，Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教材）对此有所讲解。至于泰勒级数（Taylor series）在甚么情况下真正等于原来的函数，严谨的证明可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（数学分析入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。