详细解答

STEP III 1994，第 4 题

纯数学 · 常微分方程的奇解

> **STEP III 1994，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q4

本题在 *Beyond STEP* 第 8.1 节当解不唯一中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch08/non-uniqueness.html

关键思路

两边开平方：方程即 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \pm 2\sqrt{y}$，马上可以分离变量（separation of variables）。更值得留意的是，每一条抛物线（parabola）$y = (x-c)^2$ 都满足这个方程，所以方程的解不过是把 $y = x^2$ 沿 x 轴滑动所得的各个副本。一旦看出这幅图像，其后各部分要问的，就是哪些副本通过哪些点，以及所有副本有甚么共通之处。

解答

通解（general solution）

由于 $(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2 \geq 0$，任何解都有 $y \geq 0$。在 $y > 0$ 之处，可以写成

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm 2\sqrt{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{y} = \pm(x-c)$$

其中 c 为常数，而无论取哪一个符号，平方后都得到

$$y = (x-c)^2.$$

值得直接验证整条抛物线都是解，包括左右两半和顶点（vertex）：$y' = 2(x-c)$，所以对每一个 x 都有 $(y')^2 = 4(x-c)^2 = 4y$。

> ? **想一想** 两个符号得出同一条公式。那么“±”到哪里去了？

它藏在每条抛物线的两半之中。在 $y=(x-c)^2$ 上，斜率（gradient）$2(x-c)$ 在顶点左方等于 $-2\sqrt{y}$，在右方等于 $+2\sqrt{y}$，所以单单一条抛物线已经用上两个符号。到我们要令曲线通过某一点时，符号的选择便以 c 的选择这个形式重新出现。

通过 (a,b^2) 的解

我们需要 $(a-c)^2=b^2$，所以 $a-c=\pm b$，即 $c=a-b$ 或 $c=a+b$。两个解是

$$y=(x-a+b)^2 \qquad 及 \qquad y=(x-a-b)^2.$$

两者并不相同，因为 $b\neq 0$ 令 $a-b\neq a+b$。（假如 $b=0$，两者便会合并成一条顶点在 $(a,0)$ 的抛物线；这时该点亦会位于解 $y=0$ 之上，这个解我们在最后会再遇到。）把 b 换成 $-b$ 只会把两个解对调，这是理所当然的，因为点 (a,b^2) 并无改变。

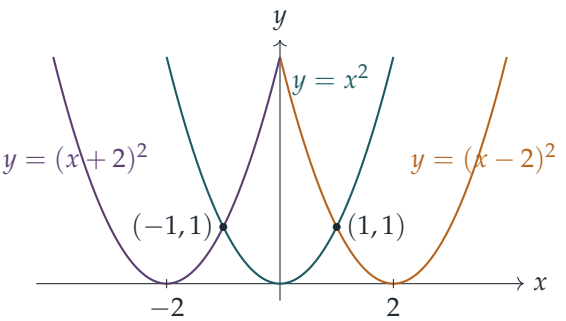
点 $(a_1,1)$ 和 $(a_2,1)$

取 $b=1$：通过 $(a,1)$ 的解是 $y=(x-a+1)^2$ 和 $y=(x-a-1)^2$。抛物线 $y=(x-c)^2$ 通过原点，当且仅当 $c=0$，所以我们需要 $a-1=0$ 或 $a+1=0$。因此

$$a_1=1, \qquad a_2=-1.$$

通过 $(1,1)$ 的解是 $y=x^2$（来自 $c=a_1-1=0$）和 $y=(x-2)^2$。通过 $(-1,1)$ 的解是 $y=(x+2)^2$ 和 $y=x^2$（来自 $c=a_2+1=0$）。

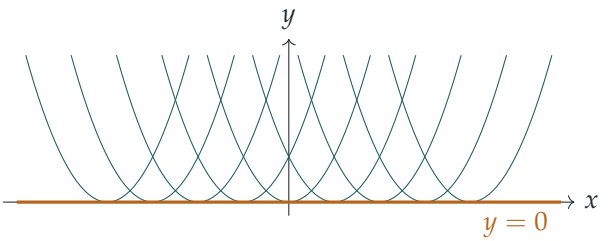
对这两点来说，通过原点的解都是同一条曲线 $y=x^2$，所以它们的图像重合。这并不令人意外：$(1,1)$ 和 $(-1,1)$ 正是 $y=x^2$ 上高度为 1 的两点，分别位于顶点两侧。另外两个解是 $y=(x-2)^2$ 和 $y=(x+2)^2$，即把 $y=x^2$ 分别向右和向左平移 2。



在 $(1,1)$，曲线 $y=x^2$ 的斜率是 $+2$，而 $y=(x-2)^2$ 的斜率是 -2：通过同一点的两个解总是在该点相交，斜率为 $\pm 2b$，每个平方根各占其一。

曲线族及其公切线（common tangent）

改变 a 和 b，只不过是令 $c = a \pm b$ 取遍所有实数，所以这个曲线族就是 $y = x^2$ 的所有水平平移（translate）。



每一条抛物线都在其顶点 $(c, 0)$ 与 x 轴相切，该处的斜率为 0。所以直线 $y = 0$ 是整个曲线族的公切线（它是这族曲线的包络线（*envelope*））。

它之所以重要，是因为 $y = 0$ 本身也是一个解：这时 $y' = 0$，而 $(y')^2 = 0 = 4y$。但无论 c 取甚么值，它都不是其中一条抛物线：它是一个奇异解（*singular solution*），分离变量时因为除以 $\sqrt{y}$ 而遗漏了它。在每一点 $(c, 0)$，解 $y = 0$ 与抛物线 $y = (x - c)^2$ 有相同的值和相同的斜率，所以通过 x 轴上各点的解并不唯一。事实上我们可以把它们拼接起来：对于 $p < q$，

$$y = \begin{cases} (x-p)^2, & x < p, \\ 0, & p \le x \le q, \\ (x-q)^2, & x > q \end{cases}$$

有连续的导数，并且处处满足方程。所以严格来说，通过 (a, b^2) 的“两个解”是指在该点附近与那两条抛物线吻合的两个解；离开该点之后，解一旦到达 x 轴，便可以沿着该轴走一段才离开。

验算

- 代回原式：对于 $y = (x - a \pm b)^2$，在 $x = a$ 时得 $y = b^2$，而 $(y')^2 = 4y$ 恒成立。
- 在 (a, b^2) 的两个斜率是 $2(a - c) = \pm 2b$，它们的平方都是 $4b^2 = 4y$，符合要求。
- 数值上，以中心差分（central difference）计算导数，确认了随机选取的抛物线以及上述取 $p = -1$、$q = 1$ 的拼接曲线都满足 $(y')^2 = 4y$，亦确认了通过 $(1, 1)$ 和 $(-1, 1)$ 的解分别有 $c \in \{0, 2\}$ 和 $c \in \{-2, 0\}$，两者只共有 $c = 0$。

常见错误

- 只写 $y' = 2\sqrt{y}$，结果通过每一点只得到半条抛物线。
- 忘记了 $y = 0$：它是一个真正的解，而且正正是最后一部分所要找的公切线。
- 以为通过 $(a_1, 1)$ 和 $(a_2, 1)$ 而又经过原点的两个解是不同的曲线;其实两者都是 $y = x^2$。

STEP 之外

这个方程是解的唯一性（uniqueness）失效的标准例子。皮卡–林德勒夫定理（Picard–Lindelöf theorem）保证，当 f 对 y 满足利普希茨（Lipschitz）条件时，$y' = f(x, y)$ 通过一点的解恰好只有一个；但 $\pm 2\sqrt{y}$ 在 $y = 0$ 附近并不满足利普希茨条件，而那里正是抛物线与奇异解相遇之处。单参数曲线族的包络线，以及它们为克莱罗（Clairaut）方程一类方程所带来的奇异解，是常微分方程（ODE）入门课程中的经典课题。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程入门教科书），以类似这个的例子讨论了解的存在性和唯一性。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。