详细解答

STEP III 1994，第 3 题

纯数学 · 球面、平面与扣连

> **STEP III 1994，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q3

关键思路

每个圆各自位于一个平面上，而这两个平面相交于直线 L。因此 C_1 能够穿过 C_2 所在平面的地方，就只有它在 L 上的两个点，反过来也是一样。于是，两个圆是否互相扣连，归根究底是一个一维的问题：L 上的四个点沿着这条直线是怎样排列的。

解答

平面与球面

设一个球面（sphere）的球心为 Q、半径为 r，并设 d 为 Q 到平面 Π 的距离。设 F 为由 Q 到 Π 的垂足（foot of the perpendicular）。对于 Π 上的一点 X，由毕氏定理（Pythagoras）得 $QX^2 = d^2 + FX^2$，所以 X 在球面上当且仅当 $FX^2 = r^2 - d^2$。因此：

- 若 $d > r$，平面与球面不相交；
- 若 $d = r$，平面与球面相切于唯一的一点 F（它是一个切平面（tangent plane））；
- 若 $d < r$，交集是 Π 上的一个圆，圆心为 F，半径为 $\sqrt{r^2 - d^2}$。当 $d = 0$ 时，这是一个大圆（great circle），半径为 r。

已知资料

配方（completing the square）后，S_2 为

$$x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 3,$$

球心为 $(0,3,2)$，半径为 $\sqrt{3}$。球面 S_1 的球心为 O，半径为 $\sqrt{7}$。

O 到 P_1 的距离为 $\frac{|-1|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} < \sqrt{7}$，所以 C_1 确实是一个圆，半径为 $\sqrt{7 - \frac{1}{10}}$。$(0,3,2)$ 到 P_2 的距离为 $\frac{|0-3+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < \sqrt{3}$，所以 C_2 是一个半径为 $\sqrt{3-2} = 1$ 的圆。它的圆心就是垂足 $(0,3,2) + (1,-1,0) = (1,2,2)$；验证一下：$1 - 2 + 1 = 0$。

直线 L

把两个平面方程相减，得 $2x - 2 = 0$，所以 $x = 1$，继而 $y = x + 1 = 2$，而 z 可取任意值。所以

$$L = \{(1,2,t) : t \in \mathbb{R}\},$$

即通过 $(1,2,0)$ 的铅垂线。

在 S_1 上：$1 + 4 + t^2 = 7$，所以 $t = \pm\sqrt{2}$。因此 L 与 S_1 相交于

$$(1,2,\sqrt{2}) \quad \text{和} \quad (1,2,-\sqrt{2}).$$

在 S_2 上：$1 + 1 + (t-2)^2 = 3$，所以 $t - 2 = \pm 1$。因此 L 与 S_2 相交于

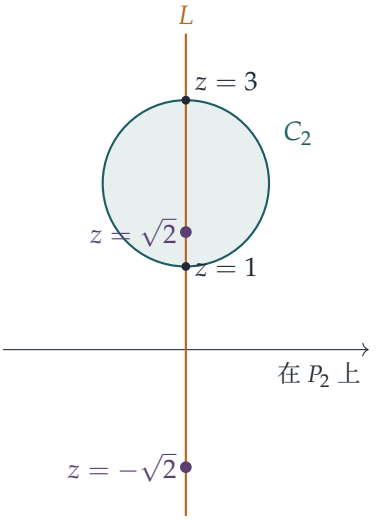
$$(1,2,1) \quad \text{和} \quad (1,2,3).$$

由于 L 位于 P_1 上，L 在 S_1 上的点正好就是 L 在 C_1 上的点；同样地，L 在 S_2 上的点就是 L 在 C_2 上的点。特别地，$(1,2,1)$ 和 $(1,2,3)$ 是 C_2 一条直径的两个端点，这与它的圆心 $(1,2,2)$ 和半径 1 吻合。

两个圆是否互相扣连?

首先，两个圆并不相交。任何公共点都必定位于 $P_1 \cap P_2 = L$ 上，而 C_1 在 L 上的点（$z = \pm\sqrt{2}$）与 C_2 在 L 上的点（$z = 1,3$）并不相同。

设 D_2 为 P_2 上以 C_2 为边界的平面圆盘（disc）。它与 L 的交集是由 $(1,2,1)$ 到 $(1,2,3)$ 的直径，即满足 $1 \le t \le 3$ 的点 $(1,2,t)$。



图中所示是平面 P_2，当中 C_2 及其圆盘以阴影表示。紫色的点是 C_1 穿过 P_2 的位置。

? **想一想** 为甚么 C_1 在这两个点真的是穿过 P_2，而不只是与它相切?

直线 L 把平面 P_1 分成两个半平面（half-plane），而由于 P_1 沿着 L 横越 P_2，这两个半平面分别位于 P_2 的两侧。圆 C_1 与 L 相交于两个不同的点，所以 L 把 C_1 切成两段弧，每个半平面各有一段。因此 C_1 的一段弧完全位于 P_2 的一侧，另一段弧则完全位于另一侧，而 C_1 在 $(1, 2, \sqrt{2})$ 和 $(1, 2, -\sqrt{2})$ 穿过 P_2，此外再无其他穿越点。

现在 $1 < \sqrt{2} < 3$，所以在 $(1, 2, \sqrt{2})$ 的穿越点位于圆盘 D_2 之内。但 $-\sqrt{2} < 1$，所以在 $(1, 2, -\sqrt{2})$ 的穿越点位于圆盘之外。沿 C_1 绕一圈，我们恰好穿过 C_2 所张成的圆盘一次，然后在圆盘之外越过 P_2 返回。换言之，C_1 穿过 C_2 一次，就像链条上相扣的两个环。

沿着 L，这四个点的次序是

$$-\sqrt{2} \ < \ 1 \ < \ \sqrt{2} \ < \ 3,$$

所以来自 C_1 的一对点与来自 C_2 的一对点互相交错（interleave）。正正是这一点令 C_1 穿过 D_2 一次。（假如两对点都没有把对方分隔开，C_1 就会穿过 D_2 两次或完全不穿过，两个圆便不会互相扣连。）因此**圆 C_1 与 C_2 互相扣连**（linked）。

我们无法把它们拉开：任何把它们变成两个相距甚远的圆的连续移动，都必须把 C_1 穿过 C_2 的圆盘的次数由奇数变为偶数。穿越点总是成对地出现和消失，除非其中一个圆穿过另一个圆，而在不剪断的情况下把它们分开，是不容许这样做的。

验算

把各点逐一代入：例如 $(1,2,1)$ 给出 $3-2-1=0$、$1-2+1=0$ 和 $1+4+1-12-4+10=0$。数值方面，我们把两个圆参数化（parametrise），并计算高斯（Gauss）的环绕积分（linking integral）$\frac{1}{4\pi}\oint\oint \frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\cdot(\mathrm{d}\mathbf{r}_1\times\mathrm{d}\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}$，得到 1.002（不扣连的一对圆会给出 0）。我们亦求得两个圆之间的最短距离约为 0.09，所以它们十分接近，但并不相碰。

常见错误

- 只检查两个圆是否相交。它们并不相交，但单凭这一点完全无法说明它们是否扣连。
- 忘记了 C_1 与 P_2 的穿越点必定位于 L 上，反而在别处寻找。
- 弄错 S_2 的球心：$-6y$ 和 $-4z$ 两项给出的球心是 $(0,3,2)$，而不是 $(0,-3,-2)$。

STEP 之外

两条互不相交的闭曲线（closed curve）是否扣连，是由一个整数不变量（invariant）来量度的，称为环绕数（linking number）。计算它的方法，可以是数算其中一条曲线穿过另一条曲线所张成的曲面的带符号穿越次数（这正是我们所做的），也可以是使用“验算”一节中高斯的二重积分（double integral）。环绕数是踏入纽结理论（knot theory）和代数拓扑（algebraic topology）的第一步。Colin Adams 的 *The Knot Book*（一本纽结理论入门书）是十分易读的入门读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。