详细解答

STEP III 1994，第 2 题

纯数学 · 回文四次方程

> **STEP III 1994，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q2

关键思路

(i) 中的四次方程是回文（palindromic）的：它的系数由前往后读和由后往前读都一样。除以 x^2 之后，x^2 与 x^{-2} 配成一对，x 与 x^{-1} 配成一对，而这两对都可以用 $y = x + x^{-1}$ 表示，于是四次方程（quartic）便简化成 y 的二次方程（quadratic）。(ii) 没有提示，所以我们要找出同一种对称性（symmetry）的变奏：只要容许加入一个缩放因子，系数 1, 1, −10, −4, 16 同样可以配对，由此想到代换（substitution）$y = x - 4/x$。

解答

第 (i) 部分

常数项为 $1 \neq 0$，所以 $x = 0$ 不是根（root），我们可以除以 x^2：

$$x^2 + 10x + 26 + \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \qquad \text{即} \qquad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0.$$

设 $y = x + x^{-1}$，则 $y^2 = x^2 + 2 + x^{-2}$，所以 $x^2 + x^{-2} = y^2 - 2$。方程变成

$$y^2 - 2 + 10y + 26 = 0 \iff y^2 + 10y + 24 = 0 \iff (y + 4)(y + 6) = 0,$$

所以 $y = -4$ 或 $y = -6$。现在回到 x，把 $x + x^{-1} = y$ 两边乘以 x（因为 $x \neq 0$，这一步同样没有问题）：

$$x + \frac{1}{x} = -4 \iff x^2 + 4x + 1 = 0 \iff x = -2 \pm \sqrt{3},$$

$$x + \frac{1}{x} = -6 \iff x^2 + 6x + 1 = 0 \iff x = -3 \pm 2\sqrt{2}.$$

这是四个互不相同的数，而四次方程最多只有四个根，所以方程的解是

$$x = -2 \pm \sqrt{3}, \qquad x = -3 \pm 2\sqrt{2}.$$

留意这些根是以互为倒数（reciprocal）的形式成对出现的：$(-2+\sqrt{3})(-2-\sqrt{3}) = 1$ 和 $(-3+2\sqrt{2})(-3-2\sqrt{2}) = 1$。回文多项式（polynomial）必然如此，因为把 x 换成 $1/x$ 再乘以 x^4，便会得回同一条方程。

第 (ii) 部分

> **想一想** 系数 1, 1, −10, −4, 16 并不对称。有没有类似 (i) 的代换仍然行得通?

比较外侧的两对系数。常数项是首项系数（leading coefficient）的 $16 = 4^2$ 倍，而 x 的系数是 x^3 的系数的 -4 倍。因此各项可以这样配对：

$$x^4 + 16 = x^2\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right), \qquad x^3 - 4x = x^2\left(x - \frac{4}{x}\right).$$

这就是把 $1/x$ 换成 $-4/x$ 之后的回文规律。由于 $x = 0$ 不是根（常数项是 16），除以 x^2 可得

$$\left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right) + \left(x - \frac{4}{x}\right) - 10 = 0.$$

设 $y = x - 4/x$。则 $y^2 = x^2 - 8 + 16/x^2$，所以 $x^2 + 16/x^2 = y^2 + 8$，而

$$y^2 + 8 + y - 10 = 0 \iff y^2 + y - 2 = 0 \iff (y-1)(y+2) = 0,$$

得 $y = 1$ 或 $y = -2$。把 $x - 4/x = y$ 乘以 x：

$$x - \frac{4}{x} = 1 \iff x^2 - x - 4 = 0 \iff x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2},$$
$$x - \frac{4}{x} = -2 \iff x^2 + 2x - 4 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{5}.$$

这同样是四个互不相同的根，所以全部的根就是这些：

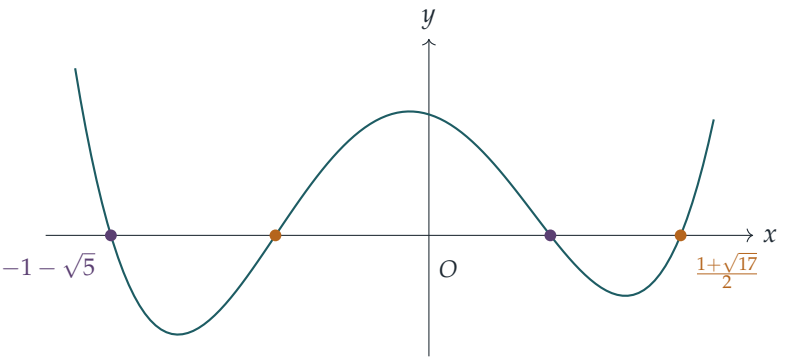
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}, \qquad x = -1 \pm \sqrt{5}.$$

这次各对根的积是 -4 而不是 1：对称性现在是 $x \mapsto -4/x$。

作为验算，以上的运算相当于因式分解（factorisation）

$$x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 16 = (x^2 - x - 4)(x^2 + 2x - 4),$$

你可以展开来确认：x^3 项给出 $2 - 1 = 1$，x^2 项给出 $-4 - 2 - 4 = -10$，而 x 项给出 $4 - 8 = -4$。



(ii) 中四次多项式的图像与横轴相交四次：琥珀色的根来自 $x^2-x-4=0$，紫红色的根来自 $x^2+2x-4=0$。

验算

- 根的积：在 (i) 中，四个根相乘得 $1\cdot 1=1$，即常数项；在 (ii) 中，它们相乘得 $(-4)(-4)=16$，同样是常数项。
- 根的和：在 (i) 中，$(-4)+(-6)=-10$，即 x^3 系数的相反数；在 (ii) 中，$1+(-2)=-1$，情况相同。
- 数值上，$x=-2+\sqrt{3}\approx -0.268$ 和 $x=-3-2\sqrt{2}\approx -5.828$ 都令 (i) 中的四次多项式的值为零，误差在 10^{-9} 之内；而 $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{17})\approx 2.562$ 和 $x=-1-\sqrt{5}\approx -3.236$ 在 (ii) 中亦然。

常见错误

- 忘记交叉项 (cross term)：$x^2+x^{-2}=y^2-2$，而不是 y^2；在 (ii) 中则是 $x^2+16x^{-2}=y^2+8$，这里是加号，因为 $(x-4/x)^2$ 的交叉项是 -8。
- 在 (ii) 中尝试 $y=x+4/x$。这样可得 $x^2+16/x^2=y^2-8$，却无法得出 x^3-4x，因为它的正负号要求用 $x-4/x$。
- 求出 y 的值便停下来。题目要求的是 x，而每个 y 的值对应两个 x 的值。

STEP 之外

这个技巧之所以行得通，是因为这些多项式在某个代换之下保持不变 (invariant)：(i) 中是 $x\mapsto 1/x$，(ii) 中是 $x\mapsto -4/x$。y 这个量在该代换之下不变，而任何在该代换下不

变的多项式表达式，都可以用 y 来表示。这是对伽罗瓦理论（Galois theory）的初步一瞥：在这套理论中，多项式各根之间的对称性决定了对应的方程可以怎样求解。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）是了解这些想法如何发展下去的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。