详细解答

STEP III 1994，第 14 题

概率与统计 · 几何概率

STEP III 1994，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/94-s3-q14

关键思路

圆周角（inscribed angle）等于所对的弧在圆心所张的角的一半。因此，三角形的三个角正好是 π 乘以 P、Q、R 把圆分成的三段弧，而弧长以占圆周的比例来量度。问题于是变成：一个圆怎样被随机分成三段？而这其实是一个关于三角形内面积的问题。

解答

建立模型

以占圆周的比例来量度圆上的位置，这样圆的“长度”就是 1。由旋转对称性（rotational symmetry），P 的位置无关重要，所以把 P 放在 0。于是 Q 和 R 的位置是独立的，并在 $[0,1)$ 上均匀分布（uniformly distributed）。

设 $U < V$ 为 Q 和 R 的位置由小至大的排列。数对 (U,V) 在区域 $0 < u < v < 1$ 上均匀分布，而这个区域的面积是 $\frac{1}{2}$，所以它的联合密度（joint density）在该区域上是 2。（两点重合的概率是 0，下文所有边界情况亦然。）三段弧是

$$X = U, \qquad Y = V - U, \qquad Z = 1 - V, \qquad X + Y + Z = 1.$$

变量代换 $(u,v) \mapsto (x,y) = (u, v-u)$ 的雅可比行列式（Jacobian）是 1，所以 (X,Y) 在三角形

$$T = \{(x,y) : x > 0,\ y > 0,\ x + y < 1\},$$

上的密度是 2，而这个三角形的面积是 $\frac{1}{2}$。因此，下文每一个概率都是 T 内某块面积的两倍。

想一想 为甚么三角形的每个角都是 π 乘以一段弧?

三角形在 R 的角是一个圆周角，它所对的是不包含 R 的那段弧 PQ。根据圆周角定理（inscribed angle theorem），它等于该弧在圆心所张的角的一半。一段占圆周比例为 x 的弧，在圆心所张的角是 $2\pi x$，所以在 R 的角是 πx。每个顶点的情况都一样，所以 PQR 的三个角是 πX、πY 和 πZ（它们的和是 π，正如所料）。因此

$$\text{某个角大于}k\pi \iff \text{对应的弧大于}k.$$

设 A_X、A_Y 和 A_Z 分别为事件 $X > k$、$Y > k$ 和 $Z > k$。我们要求 $\mathrm{P}(A_X \cup A_Y \cup A_Z)$。

一段弧大于 k

对于 $0 \le k \le 1$:

- A_X 是 T 中 $x > k$ 的部分：一个两条直角边均为 $1-k$ 的三角形，面积是 $\frac{1}{2}(1-k)^2$。
- A_Y 是 $y > k$ 的部分：同样的计算给出面积 $\frac{1}{2}(1-k)^2$。
- A_Z 是 $x + y < 1 - k$ 的部分：位于角落、两条直角边均为 $1-k$ 的三角形，面积是 $\frac{1}{2}(1-k)^2$。

乘以二，得 $\mathrm{P}(A_X) = \mathrm{P}(A_Y) = \mathrm{P}(A_Z) = (1-k)^2$。

$\frac{1}{2} \le k \le 1$ 的情况

最多只有一段弧可以大于 k：假如有两段，它们的总和就会大于 $2k \ge 1$，但三段弧加起来才是 1。所以事件 A_X、A_Y、A_Z 互斥（mutually exclusive），而

$$\mathrm{P}(\text{某个角大于}k\pi) = 3(1-k)^2,$$

正是所求。

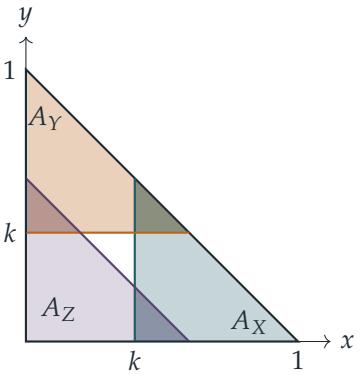
$\frac{1}{3} \le k \le \frac{1}{2}$ 的情况

现在可以有两段弧同时大于 k，所以我们使用容斥原理（inclusion–exclusion）。

两段弧。 $A_X \cap A_Y$ 是 T 中 $x > k$、$y > k$、$x + y < 1$ 的部分。代入 $x = k + s$、$y = k + t$，条件变成 $s, t > 0$、$s + t < 1 - 2k$，这是一个两条直角边均为 $1 - 2k \ge 0$ 的三角形，面积是 $\frac{1}{2}(1-2k)^2$。所以 $\mathrm{P}(A_X \cap A_Y) = (1-2k)^2$。另外两对的结果相同：例如 $A_X \cap A_Z$ 是 $x > k$、$y > 0$、$x + y < 1 - k$，同样是一个两条直角边均为 $1 - 2k$ 的三角形。

三段弧。 三段弧全部大于 k 就需要 $X + Y + Z > 3k \ge 1$，这是不可能的。所以三个事件的交集的概率是 0。

下图显示 $k = 0.4$ 时的 T：三个位于角落的三角形是 A_X、A_Y、A_Z，颜色较深的重叠部分是两两的交集。



由容斥原理，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_X \cup A_Y \cup A_Z) &= 3(1-k)^2 - 3(1-2k)^2 + 0 \\ &= 3\big[(1-k)-(1-2k)\big]\big[(1-k)+(1-2k)\big] \\ &= 3k(2-3k).\end{aligned}$$

所以当 $\frac{1}{3} \le k \le \frac{1}{2}$ 时，至少有一个角大于 $k\pi$ 的概率是

$$3k(2-3k) = 6k - 9k^2.$$

验算

- 在 $k = \frac{1}{2}$ 时，两条公式都给出 $\frac{3}{4}$，所以它们连续地衔接起来。这就是那个经典结果：随机的圆内接三角形是钝角三角形的概率为 $\frac{3}{4}$。
- 在 $k = \frac{1}{3}$ 时，我们得到 $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = 1$。这是对的：最大的角永远不小于 $\frac{\pi}{3}$，因为三个角加起来是 π。
- 在 $k = 1$ 时，我们得到 0，因为没有角可以大于 π。
- 模拟 4×10^5 个随机三角形，直接由坐标计算各个角，在 $k = 0.4$ 时得到 0.9602（公式给出 0.96），在 $k = 0.6$ 时得到 0.4783（公式给出 0.48）。

常见错误

- 用了整段弧 PQ，而不是不包含第三个顶点的那段弧。两段弧 PQ 之中，只有一段是 R 所对的弧。

- 把 X、Y、Z 当作独立的均匀随机变量。它们受 $X+Y+Z=1$ 所约束，而老老实实处理这个约束的方法，就是面积图。
- 在 $k=\frac{1}{2}$ 以下仍然套用 $3(1-k)^2$。当 $k<\frac{1}{2}$ 时，它把有两个大角的三角形重复计算了，而在 $k=\frac{1}{3}$ 时它会给出 $\frac{4}{3}>1$。

STEP 之外

弧 (X,Y,Z) 在单纯形（simplex）$x+y+z=1$ 上均匀分布。这就是狄利克雷分布（Dirichlet distribution），它描述随机点把一个区间或一个圆切开后留下的“间距”。有 n 个点时，同样的容斥原理给出 $\mathrm{P}(\text{最大间距}>k)=\sum_j(-1)^{j+1}\binom{n}{j}(1-jk)_+^{n-1}$，这条公式可追溯至 Whitworth。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）对几何概率和联合密度有很好的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。