详细解答

STEP III 1994，第 13 题

概率与统计 · 指数分布的寿命

> **STEP III 1994，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q13

关键思路

一切都源自指数分布（exponential distribution）寿命的生存函数（survival function）$\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$。以“已存活至 t_0”为条件，只不过是把两个这样的指数相除，著名的无记忆性（memoryless property）正是由此而来。直至两条绳都失效为止的时间，是两个独立（independent）寿命的最大值，而最大值不超过 t 恰好等价于每个寿命都不超过它。因此我们先求出它的分布函数（distribution function），然后求导。至于最后一部分，“两条绳在同一场表演中失效”是指两条绳在同一个区间 $((n-1)h,\, nh]$ 内失效，再对 n 求和。这个和是一个等比级数（geometric series）。

解答

已在使用中的绳

设 T 为该绳的总寿命，则对 $t \geq 0$ 有

$$\mathrm{P}(T > t) = \int_t^{\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\, \mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

已知该绳已经撑过了 t_0 小时，即 $T > t_0$。设 $S = T - t_0$ 为它还能再用的时间。对 $s \geq 0$，事件 $\{T > t_0 + s\}$ 包含于 $\{T > t_0\}$ 之内，所以

$$\mathrm{P}(S > s \mid T > t_0) = \frac{\mathrm{P}(T > t_0 + s)}{\mathrm{P}(T > t_0)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t_0+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t_0}} = \mathrm{e}^{-\lambda s}.$$

因此，剩余时间 S 的概率密度（density）在 $s \geq 0$ 时为 $\lambda \mathrm{e}^{-\lambda s}$（在 $s < 0$ 时为 0）。无论 t_0 是多少，它都服从参数同样为 λ 的指数分布。

诠释。用过的绳与新绳完全一样好。绳并不“记得”自己过去用了多久，无论绳龄多大，

它在接下来一小段时间 δt 内失效的机会都约为 $\lambda\,\delta t$（即失效率（failure rate）为常数）。这种模型适用于由突发的随机意外所造成的失效。但对真实的绳来说并不切合实际：绳会磨损、起毛，所以旧绳应该更容易在短期内失效。采用失效率随绳龄递增的模型会更好。表演者坚持使用新绳，在现实中是明智的，尽管在这个模型之下并无分别。

直至两条新绳都失效的时间

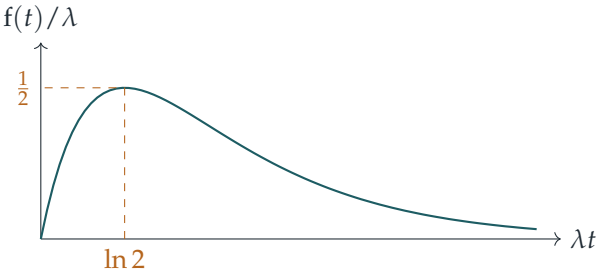
设 T_1, T_2 为两条新绳的寿命。两者互相独立，各自的分布函数为 $\mathrm{P}(T_i \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ $(t \ge 0)$。两条绳到时刻 t 都已失效，恰好等价于较迟的那次失效已经发生，所以我们要求的时间是 $M = \max(T_1, T_2)$。现在 $M \le t$ 当且仅当 $T_1 \le t$ 并且 $T_2 \le t$，所以由独立性得

$$\mathrm{P}(M \le t) = \mathrm{P}(T_1 \le t)\,\mathrm{P}(T_2 \le t) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^2 \qquad (t \ge 0),$$

而对 $t < 0$ 则有 $\mathrm{P}(M \le t) = 0$。利用链式法则（chain rule）求导，

$$\mathrm{f}(t) = 2(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} = 2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) \quad (t \ge 0),$$

而对 $t < 0$ 则有 $\mathrm{f}(t) = 0$，正如题目所求。



与单一指数寿命不同，M 在 $t = 0$ 处的密度为 0，因为两次失效不可能一开始就同时发生。密度在 $\mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$ 处达到最高点。

两条绳都在第 n 场表演中失效

第 n 场表演对应表演时间的区间 $((n-1)h,\, nh]$。记 $q = \mathrm{e}^{-\lambda h}$。对其中一条绳，

$$\mathrm{P}((n-1)h < T_i \le nh) = \mathrm{e}^{-\lambda(n-1)h} - \mathrm{e}^{-\lambda nh} = q^{n-1}(1 - q).$$

想一想 我们应否把 $\mathrm{f}(t)$ 在第 n 场表演的时段上积分？

不应该。$\int_{(n-1)h}^{nh} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$ 是第二次失效发生在第 n 场表演中的概率。第一条绳可能早在之前的某场表演中已经失效。我们需要的是每一条绳都在第 n 场表演中失效，而两条绳互相独立，所以

$$p_n = (q^{n-1}(1 - q))^2 = \mathrm{e}^{-2\lambda(n-1)h}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda h})^2.$$

两条绳在同一场表演中失效

对 $n = 1, 2, 3, \ldots$，各个“两条绳都在第 n 场表演中失效”的事件互斥（mutually exclusive），所以我们把它们的概率相加。这是一个公比为 $q^2 < 1$ 的等比级数（因为 $\lambda h > 0$）：

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = (1-q)^2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{2(n-1)} = \frac{(1-q)^2}{1-q^2} = \frac{1-q}{1+q}.$$

现在把分子和分母同乘以 $\mathrm{e}^{\lambda h/2}$：

$$\frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda h}}{1+\mathrm{e}^{-\lambda h}} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda h/2} - \mathrm{e}^{-\lambda h/2}}{\mathrm{e}^{\lambda h/2} + \mathrm{e}^{-\lambda h/2}} = \tanh\left(\frac{\lambda h}{2}\right),$$

这就是所要求的结果。

验算

- $\int_0^{\infty} \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \left[(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^2\right]_0^{\infty} = 1$，所以 f 确实是一个概率密度。
- 极限情况：当 $h \to \infty$（一场永不完结的表演）时，答案 $\tanh(\lambda h/2) \to 1$。当 $h \to 0$ 时，它趋向 0，因为两个连续型寿命几乎不可能落在同一个极短的区间内。当 h 很小时，它约为 $\lambda h/2$。
- 数值上，取 $\lambda = 0.7$ 和 $h = 0.8$，级数与 $\tanh(0.28)$ 都给出 0.27291。模拟 2×10^5 对绳所得的结果为 0.2746，而 $p_1 \approx 0.1839$ 亦与模拟所得的 0.1848 吻合。

常见错误

- 用了最小值而非最大值。最小值是直至第一条绳失效的时间，它服从参数为 2λ 的指数分布。
- 把 f 在第 n 场表演的时段上积分来求 p_n。这些概率加起来是 1，而不是 $\tanh(\lambda h/2)$。

STEP 之外

无记忆性刻划了指数分布：它是唯一具有这个性质的连续型分布。在可靠性理论（reliability theory）中，“失效率”（风险函数，hazard function）$\mathrm{f}(t)/\mathrm{P}(T > t)$ 只有在指数分布下才是常数。磨损则以递增的风险函数来建模，例如采用韦布尔分布（Weibull distribution）。独立变量的最大值和最小值是次序统计量（order statistics）的两个极端情况，你会在大学的第一门概率课程中遇到它们。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）涵盖了以上所有内容。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。