详细解答

STEP III 1994，第 12 题

概率与统计 · 首步分析

> **STEP III 1994，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q12

关键思路

把各局*两局两局*地成对来看。领先 2 局的情况只可能在打完偶数局之后出现，而每打完一对局，两名球员各发球一次，于是发球权又回到原来的一方。这样，整场比赛就变成一个简单的重复试验：每一对局不是由 A 全胜，就是由 B 全胜，又或者各胜一局，而各胜一局的话，双方便回到平手的局面。标准网球其实是同一回事，只是头两对局要特别处理。

解答

全篇记

$$a = p_A p_B, \qquad b = q_A q_B, \qquad s = p_A q_B + q_A p_B.$$

在连续的一对局中（两名球员各发球一局），a 是 A 两局全胜的概率（probability），b 是 B 两局全胜的概率，s 是两人各胜一局的概率（或是 A 保住发球局而 B 也保住发球局，或是双方都破发）。我们按题目的原意，假设不同局的结果互相独立（independent）。结果只有这三种，所以

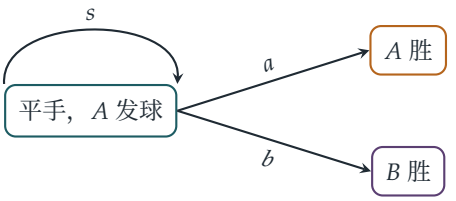
$$a + b + s = (p_A + q_A)(p_B + q_B) = 1.$$

简化网球

每打一局，比分之差就改变 ± 1，所以打完偶数局后分差是偶数，打完奇数局后分差是奇数。因此，恰好领先 2 局的情况，最早只可能在第 $2, 4, 6, \ldots$ 局之后出现；而如果打完偶数局后比赛仍未结束，双方必定是平手。

于是把比赛分成一对一对（第 1–2 局、第 3–4 局、…）。由平手、轮到 A 发球的局面开始，

下一对局有概率 s 令比赛以 A 胜出告终，有概率 b 令比赛以 B 胜出告终，另有概率 s 令我们回到平手、又轮到 A 发球的局面。这时的情况与开始时完全一样，所以



$$P_{\text{short}} = a + sP_{\text{short}} \quad \Longrightarrow \quad P_{\text{short}} = \frac{a}{1-s} = \frac{a}{a+b} = \frac{p_A p_B}{p_A p_B + q_A q_B},$$

其中用到 $1 - s = a + b$。（除以 $1 - s$ 并无问题，除非 $s = 1$；那是每一对局都各胜一局、比赛永远不会结束的退化情况。）

如果由 B 先发球，每一对局就是先打一局 B 的发球局，再打一局 A 的发球局。A 两局全胜、B 两局全胜、两人各胜一局的概率分别是 $p_B p_A$、$q_B q_A$ 和 $q_B p_A + p_B q_A$：仍然是同样的 a、b、s，因为一对局之中两局的先后次序并无影响。同样的论证给出同样的答案，所以 P_{short} 与谁先发球无关。

4 局内分出胜负

未打完 4 局之前，比赛不可能分出胜负。打完 4 局后（即两对局，由 A 先发球），分差是偶数，而比赛分出胜负，当且仅当比分是 4–0、3–1、1–3 或 0–4。用两对局来表示：

- A 以 4–0 胜出：A 两对局全胜，概率为 $a^2 = p_A^2 p_B^2$；
- 0–4：B 两对局全胜，概率为 $b^2 = q_A^2 q_B^2$；
- A 以 3–1 胜出：A 全胜其中一对局，另一对局各胜一局，两种次序都可以，概率为 $2as$；
- 1–3：同理，概率为 $2bs$。

相加得

$$\Pr(4 \text{ 局内分出胜负}) = p_A^2 p_B^2 + q_A^2 q_B^2 + 2(p_A p_B + q_A q_B)(p_A q_B + q_A p_B),$$

正是所求。

概率相等时的标准网球

如果比赛在 4 局内未分胜负，比分就是 2–2。这种情况的概率是 $s^2 + 2ab$（两对局都各胜一局，或两名球员各全胜一对局，两种次序都可以）。由 2–2 开始，“领先 2 局”的规则正好就是简化网球由平手开始的规则，而第 5 局由 A 发球；所以由这里开始，A 胜出的

概率是 P_{short}。因此，一般而言，

$$P_{\text{stan}} = a^2 + 2as + (s^2 + 2ab)P_{\text{short}}.$$

现在取 $p_A = p_B = p$ 和 $q_A = q_B = q$，于是 $a = p^2$，$b = q^2$，$s = 2pq$，而 $P_{\text{short}} = \dfrac{p^2}{p^2+q^2}$。那么

$$P_{\text{stan}} = p^4 + 4p^3q + \frac{6p^4q^2}{p^2+q^2}.$$

想一想 有没有办法比较 P_{stan} 与 P_{short}，而无须把所有式子按 p 和 q 的幂展开？

有：把简化网球同样在头四局上展开。把 $P_{\text{short}} = a + sP_{\text{short}}$ 连用两次，

$$P_{\text{short}} = a + as + s^2P_{\text{short}}.$$

用文字来说：A 全胜第一对局；或者第一对局各胜一局而 A 全胜第二对局；或者两对局都各胜一局，一切重新开始。从 P_{stan} 的公式减去此式，s^2P_{short} 两项互相抵消：

$$\begin{aligned} P_{\text{stan}} - P_{\text{short}} &= a^2 + as - a + 2abP_{\text{short}} \\ &= a(a+s-1) + 2abP_{\text{short}} \\ &= -ab + \frac{2a^2b}{a+b} \qquad (\text{因为 } a+s-1 = -b) \\ &= \frac{ab(a-b)}{a+b}. \end{aligned}$$

这个结果对任何 p_A、p_B 都成立。代入 $a = p^2$ 和 $b = q^2$，

$$P_{\text{stan}} - P_{\text{short}} = \frac{p^2q^2(p^2-q^2)}{p^2+q^2} = \frac{p^2q^2(p-q)(p+q)}{p^2+q^2} = \frac{p^2q^2(p-q)}{p^2+q^2},$$

因为 $p+q=1$。这就是所求的结果。

个中原因从运算过程中已可看出：两种赛制只在 A 全胜第一对局而 B 全胜第二对局（或次序相反）时才有分别。简化网球把胜利判给全胜第一对局的一方；标准网球则由 2–2 继续打下去。两种次序的概率都是 ab，所以两者之差是 $ab(2P_{\text{short}} - 1)$，对较强的球员有利。

验算

- 若 $p = q = \frac{1}{2}$，两者之差为 0，按对称性理应如此：两个概率都是 $\frac{1}{2}$。
- 取 $p = 0.6$：$P_{\text{short}} = 0.36/0.52 \approx 0.6923$，$P_{\text{stan}} = 0.1296 + 0.3456 + 0.124416/0.52 \approx 0.7145$，两者之差 0.02215 与 $0.0576 \times 0.2/0.52$ 吻合。

- 4 局内分出胜负的概率 $a^2 + b^2 + 2(a+b)s$，与打成 2–2 的概率 $s^2 + 2ab$，相加得 $(a+b+s)^2 = 1$，理应如此。
- 按实际规则用电脑模拟，取 $p_A = 0.7$ 和 $p_B = 0.45$，无论谁先发球，A 在简化网球中胜出的次数都约占 65.6%，与 $0.315/0.48 = 0.65625$ 吻合。

常见错误

- 忘记 3–1 可以由两种次序得出（先各胜一局再全胜，或先全胜再各胜一局），因而漏掉因数 2。
- 以为每一局的胜出概率都相同：其实它取决于谁发球，这正是成对分组如此有用的原因。
- 写出一个无穷等比级数（infinite geometric series），却没有留意到它其实就是方程 $P = a + sP$。

STEP 之外

这种逐对分析的论证，是带有吸收态（absorbing states）的马可夫链（Markov chain）的入门例子，而方程 $P = a + sP$ 就是首步分析（first-step analysis），是求吸收概率（absorption probabilities）的标准方法。同样的想法可以求出赢得一整盘网球或一局壁球的概率，并进一步引向赌徒破产问题（gambler's ruin）和随机漫步（random walks）。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）正好以这个程度讲解随机漫步和马可夫链。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。