详细解答

STEP III 1994，第 11 题

力学 · 刚体的平衡

STEP III 1994，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/94-s3-q11

关键思路

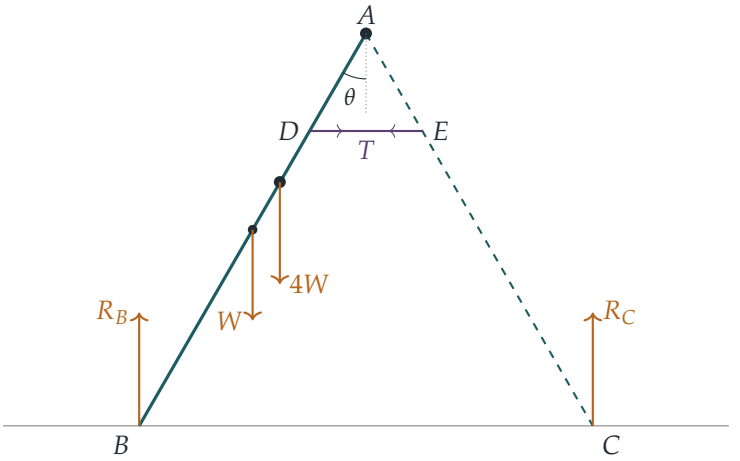
由于地面光滑（smooth），地面施加的力只能沿铅垂方向，所以把整座梯子视为一个整体，便可立即求出 C 处的反作用力（reaction）。接下来，巧妙之处全在轻质的梯脚 AC：作用于它的力只有三个（地面的反作用力、绳的张力和铰链的力），因此对铰链 A 取矩（taking moments），便可消去未知的铰链力，并把绳的张力（tension）与 C 处的反作用力联系起来。虎克定律（Hooke's law）把张力与梯子的角度连在一起，由此可把 β 表示成该角度的函数，然后求其最大值。

解答

建立模型

我们把 AB 视为均匀（uniform）杆，把 AC 视为轻质（light）杆，两者长度均为 $4a$，在 A 处以光滑铰链（hinge）相连，并把绳视为轻质弹性绳。那人则视为质点（particle）。由对称性（$AD = AE$ 及 $AB = AC$），绳 DE 是水平的。设每条梯脚与铅垂线的夹角为 θ，其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。

由于地面光滑，B 和 C 处的反作用力 R_B 和 R_C 都沿铅垂方向。AB 的重量 W 作用于其中点，与 B 的水平距离为 $2a\sin\theta$；那人的重量 $4W$ 的作用点与 B 的水平距离为 $\beta a\sin\theta$。张力 T 把 D 和 E 互相拉近。



C 处的反作用力

对整座折梯以 B 为支点取矩（铰链力和张力都是内力，所以不会出现），其中 $BC = 8a\sin\theta$：

$$R_C \cdot 8a\sin\theta = W \cdot 2a\sin\theta + 4W \cdot \beta a\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad R_C = \tfrac{1}{4}W(1+2\beta).$$

沿铅垂方向分解力，得 $R_B = 5W - R_C = \frac{1}{4}W(19-2\beta)$；由于 $\beta \le 4$（梯级在梯子上），此值为正。所以梯脚永远不会离开地面。

绳的张力

绳的长度为 $DE = 2a\sin\theta$，自然长度（natural length）为 $\frac{a}{4}$。假如绳是松弛的，则 $T = 0$，而下文对 AC 以 A 为支点取矩便会迫使 $R_C = 0$，这是不可能的。所以绳处于拉伸状态，$\sin\theta > \frac{1}{8}$，而由虎克定律得

$$T = \frac{W\left(2a\sin\theta - \frac{a}{4}\right)}{a/4} = W(8\sin\theta - 1).$$

轻质梯脚 AC 的平衡

> ? **想一想** 为甚么要单独考虑 AC，而不是 AB?

梯脚 AC 是轻质的，所以作用于它的力只有三个：C 处的 R_C、E 处的张力 T，以及 A 处的铰链力。对 A 取矩便可消去未知的铰链力。张力沿水平方向，作用点在 A 之下、铅垂深度为 $a\cos\theta$ 之处；反作用力 R_C 沿铅垂方向，作用点与 A 的水平距离为 $4a\sin\theta$。所以

$$R_C \cdot 4a\sin\theta = T \cdot a\cos\theta.$$

代入 R_C 和 T：

$$W(1+2\beta)\sin\theta = W(8\sin\theta - 1)\cos\theta,$$
$$\text{所以}\quad 1+2\beta = 8\cos\theta - \cot\theta,$$
$$\text{而}\quad \beta = \tfrac{1}{2}\left(8\cos\theta - \cot\theta - 1\right).$$

对于那人的每个位置 β，平衡（equilibrium）可以成立，当且仅当这条方程有解 θ（且 $\sin\theta > \frac{1}{8}$）。所以 β 的最大可能值，由 $f(\theta) = 8\cos\theta - \cot\theta$ 的最大值决定。

求最大值

求导数，得

$$f'(\theta) = -8\sin\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{1 - 8\sin^3\theta}{\sin^2\theta}.$$

由于 $\sin\theta$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上递增，当 $\sin\theta < \frac{1}{2}$ 时上式为正，当 $\sin\theta > \frac{1}{2}$ 时上式为负。所以 f 在 $\sin\theta = \frac{1}{2}$（即 $\theta = \frac{\pi}{6}$）时取得最大值，此时

$$f\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = 8\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}, \qquad \beta_{\max} = \tfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - 1\right) \approx 2.10.$$

此值小于 4，所以梯级确实在梯子上；而且 $\sin\theta = \frac{1}{2} > \frac{1}{8}$，所以绳是拉紧的，与我们的假设相符。

梯级的高度

梯级位于由 B 起沿 BA 方向距离 βa 之处，而 BA 与铅垂线的夹角为 θ，所以它的高度为

$$h = \beta a\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left(3\sqrt{3} - 1\right) a\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(9-\sqrt{3})\,a}{4} \approx 1.82a.$$

验算

- 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 并取 $W = a = 1$ 时：$T = 8\cdot\frac{1}{2} - 1 = 3$，$R_C = \frac{1}{4}(1 + 3\sqrt{3} - 1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$，而确实有 $R_C \cdot 4\sin\theta = 2.598 = T\cos\theta$。
- 以数值方法验算：分别对两条梯脚解出力和力矩的方程，并让 θ 扫遍 $(0, \frac{\pi}{2})$，结果发现 β 的最大值为 2.09808，出现于 $\theta \approx 30°$，对应的高度为 $1.81699a$。
- 极限情况也合理：当 $\sin\theta \to \frac{1}{8}$ 时，绳变得松弛，β 便须为负数；当 $\theta \to \frac{\pi}{2}$ 时，绳的力臂 $a\cos\theta$ 趋于零，所以 β 同样必须下降。最大值出现在两者之间，正如所料。

常见错误

- 以为 A 处的铰链力是水平的。一般而言并非如此，因为两条梯脚所受的负荷不同；对 A 取矩，便完全毋须用到这个力。
- 把整段长度 $DE = 2a\sin\theta$ 当作伸长量（extension）。伸长量应为 $2a\sin\theta - \frac{a}{4}$。
- 答案写成 $\beta_{\max}$（沿梯子量度的距离），而不是题目所问的高度；求高度还须多乘一个因子 $a\cos\theta$。

STEP 之外

这是一道静力学（statics）题目，其中的位形（configuration，即 θ）并非已知，而是由弹性绳决定，所以各个平衡位置构成一个单参数族，而问题便变成在这个族上求最优化（optimisation）。在大学里，这正是虚功（virtual work）和势能（potential energy）方法背后的想法：平衡位置就是势能的驻点（stationary point），而追问哪些平衡是稳定的，便会引出分歧（bifurcation）理论和突变理论（catastrophe theory）。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）是深入学习力学的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。