详细解答

STEP III 1994，第 10 题

力学 · 相对速度

STEP III 1994，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

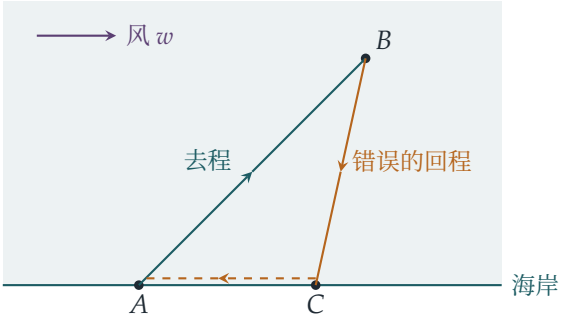
step.maths.org/questions/94-s3-q10

关键思路

一切都是向量加法（vector addition）：飞机相对地面的速度，等于它相对空气的速度加上风的速度。把海岸放在 x 轴上，以 Alphaport 为原点，并把去程的空速（air velocity）写成分量（components）。把航向（heading）反过来，空速会反向，但风不会反向，因此回程时，运动的向北部分和向东部分表现截然不同，而这正是第一部分的全部要点。至于第二部分，两个正确的地速（ground speed）来自同一个二次方程（quadratic），于是韦达定理（Vieta's formulas）就能代劳。

解答

我们把飞机看成一个质点（particle），它相对空气以大小为 v 的恒定速度运动，而空气则以恒定速度 w 向正东移动（来自西面的风是吹向东面的）。取 Alphaport A 为原点，x 轴向东，y 轴向北，于是海岸就是直线 $y = 0$，而岛屿位于 $y > 0$ 的一侧。Betaville B 位于 $\left(\frac{d}{\sqrt{2}}, \frac{d}{\sqrt{2}}\right)$。速率以 $\mathrm{km\,h^{-1}}$ 为单位，时间以小时为单位。（试卷上把这两个地方称为 Alphabet/Alphaport 和 Betaville/Betaport；它们指的是同样的地方。）



去程

设去程的空速为 (a, b)，则 $a^2 + b^2 = v^2$。相对地面的速度是 $(a + w,\ b)$，它必须指向东北，所以两个分量相等而且为正：

$$a + w = b > 0.$$

她以 y 方向的速率 b 飞过 y 方向的距离 $\frac{d}{\sqrt{2}}$，而去程所需时间为 t，所以

$$bt = \frac{d}{\sqrt{2}} = (a + w)t. \tag{1}$$

错误的回程

采用相反的航向时，她的空速是 $(-a, -b)$，但风仍然加上 $(w, 0)$，所以她相对地面的速度是

$$(w - a,\ -b).$$

想一想 她会在哪里到达海岸？在 Alphaport 的哪一边？

向北方向的运动不受风影响：她的 y 坐标由 $y = \frac{d}{\sqrt{2}}$ 起以速率 b 递减，所以由 (1) 可知，她恰好在时间 t 之后到达 $y = 0$，与去程所需的时间相同。在这段时间内，她的 x 坐标改变了 $(w - a)t$，所以她越过海岸的位置是

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}} + (w - a)t = (a + w)t + (w - a)t = 2wt,$$

这里再次用到 (1)。因此她降落在 C，位于 Alphaport 以东 $2wt$ 处：去程时，风把她推向东面，而她选定的航向正是为了抵销这个影响；但回程时，航向所作的修正反了过来，风的推力却没有反过来，所以偏移加倍。由于 $2wt > 0$，沿海岸转向西面的确是正确的方向。她以空速 v 逆风向正西飞行，地速为 $v - w > 0$（因为 $v > w$）。沿海岸的一段需时 $\dfrac{2wt}{v - w}$，所以整个回程需时

$$t + \frac{2wt}{v - w} = \frac{(v - w) + 2w}{v - w}\, t = \left(\frac{v + w}{v - w}\right) t \text{ 小时},$$

正如所求。

正确的回程

把沿直线 AB 的相对地面速度写成 $\pm(p, p)$，其中 $\sqrt{2}\, p$ 是地速。空速等于相对地面的速度减去风速，而且大小为 v。

去程时，相对地面的速度为 (p_1, p_1)，空速为 $(p_1 - w,\ p_1)$：

$$(p_1 - w)^2 + p_1^2 = v^2 \iff 2p_1^2 - 2wp_1 + (w^2 - v^2) = 0.$$

回程时，相对地面的速度为 $(-p_2,-p_2)$，其中 $p_2>0$，空速为 $(-p_2-w,\,-p_2)$：

$$(p_2+w)^2+p_2^2=v^2 \iff 2(-p_2)^2-2w(-p_2)+(w^2-v^2)=0.$$

所以 p_1 和 $-p_2$ 都是同一个二次方程 $2p^2-2wp+(w^2-v^2)=0$ 的根。它的两根之积为 $\frac{w^2-v^2}{2}<0$，所以一个根为正，一个根为负；p_1 是正的那个，$-p_2$ 是负的那个，因此它们就是两个相异的根。根据韦达定理，

$$p_1+(-p_2)=w,\qquad p_1(-p_2)=\frac{w^2-v^2}{2},$$

即 $p_1-p_2=w$ 及 $p_1p_2=\frac{1}{2}(v^2-w^2)$。

来回的距离都是 d，所以去程所需时间为 $t=\dfrac{d}{\sqrt{2}\,p_1}$，而正确回程所需时间为 $\dfrac{d}{\sqrt{2}\,p_2}$。因此

$$\begin{aligned}\frac{d}{\sqrt{2}\,p_2}&=t+\frac{d}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}\right)=t+\frac{d}{\sqrt{2}}\cdot\frac{p_1-p_2}{p_1p_2}\\&=t+\frac{d}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2w}{v^2-w^2}=t+\frac{\sqrt{2}\,wd}{v^2-w^2}\text{ 小时},\end{aligned}$$

这就是所求的结果。

验算

- 若 $w=0$，两个回程时间都化为 t，在无风的情况下理应如此。
- 取 $v=300$、$w=60$、$d=400$：$t\approx 1.1785\,\mathrm{h}$，错误的回程（以数值方法逐步模拟运动而求得）需时 $1.7678\,\mathrm{h}=\frac{360}{240}t$，而正确的回程需时 $1.5713\,\mathrm{h}$，与 $t+\frac{\sqrt{2}\cdot 60\cdot 400}{86400}$ 吻合。对许多组 $v>w$ 和 d 作随机试算，结果在舍入误差范围内一致。
- 错误的回程总是比正确的回程慢：这就是不等式 $\frac{2wt}{v-w}>\frac{\sqrt{2}\,wd}{v^2-w^2}$，即 $\sqrt{2}(v+w)t>d$；它之所以成立，是因为去程的地速 $\frac{d}{t}=\sqrt{2}p_1=\sqrt{2}(p_2+w)$ 小于 $\sqrt{2}(v+w)$，原因是 $p_2<v$。

常见错误

- 把相对地面的速度反向，而不是把空速反向：飞行员掉头时，风并不会跟着掉头。
- 以为风是吹向西面的。“来自西面”的意思是风把飞机带向东面。
- 用求根公式逐一解两个二次方程，再把繁复根式（surds）的倒数相减；只要看出 p_1 和 $-p_2$ 是同一个二次方程的根，就可以完全避开这些计算。

STEP 之外

这是相对速度（relative velocity）最简单的形式：飞机在地面参考系（frame）中的速度，等于它在空气参考系中的速度加上空气的速度，也就是一次伽利略（Galilean）参考系变换。同一套记帐方法，只要做得仔细，就是导航、大学一年级力学中的渡河问题，以及（当它在高速下失效时）狭义相对论（special relativity）的动机的基础。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对运动参考系有详尽的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。