详细解答

STEP III 1994，第 1 题

纯数学 · 归约公式

> **STEP III 1994，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s3-q1

关键思路

对于第一个积分,把 $\operatorname{sech} t$ 写成 $\dfrac{\cosh t}{\cosh^2 t} = \dfrac{\cosh t}{1+\sinh^2 t}$：分子正是 $\sinh t$ 的导数(derivative)，所以这其实是一个乔装了的 arctan。至于归约公式（reduction formula），最自然的做法是分出一个因子 $\operatorname{sech}^2 t$，即 $\tanh t$ 的导数，然后用分部积分法（integration by parts）。恒等式（identity）$\tanh^2 t = 1 - \operatorname{sech}^2 t$ 随即令 I_n 在右边重新出现，我们再把它合并起来。

解答

$\operatorname{sech} t$ 的积分

把分子和分母同乘以 $\cosh t$，并利用 $\cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t$，

$$\int_0^x \operatorname{sech} t \,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\cosh t}{1+\sinh^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

设 $s = \sinh t$，则 $\mathrm{d}s = \cosh t \,\mathrm{d}t$，积分上下限变成 0 和 $\sinh x$，所以

$$\int_0^x \operatorname{sech} t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\sinh x} \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2} = \arctan(\sinh x).$$

另一个同样好的做法是取 $\operatorname{sech} t = \dfrac{2\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}+1}$ 并设 $u = \mathrm{e}^t$，所得答案的形式是 $2\arctan(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}$。两者是一致的：它们在 $x = 0$ 时都等于零，而且导数都是 $\operatorname{sech} x$。（这个以 x 为变量的函数称为古德曼函数（Gudermannian）。）

归约公式

取 $n \geq 2$，并写 $\operatorname{sech}^n t = \operatorname{sech}^{n-2} t \cdot \operatorname{sech}^2 t$。用分部积分法，取

$$u = \operatorname{sech}^{n-2} t, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \operatorname{sech}^2 t,$$

于是 $v = \tanh t$，而根据链式法则（chain rule）（利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sech} t = -\operatorname{sech} t \tanh t$），

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = (n-2)\operatorname{sech}^{n-3} t \cdot (-\operatorname{sech} t \tanh t) = -(n-2)\operatorname{sech}^{n-2} t \tanh t.$$

于是

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\operatorname{sech}^{n-2} t \tanh t\right]_0^x + (n-2)\int_0^x \operatorname{sech}^{n-2} t \tanh^2 t \,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2)\int_0^x \operatorname{sech}^{n-2} t \,(1 - \operatorname{sech}^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2) I_{n-2} - (n-2) I_n, \end{aligned}$$

其中在 0 处的边界项等于零，因为 $\tanh 0 = 0$。

想一想 我们似乎兜了一个圈：I_n 又在右边出现了。这是个问题吗?

完全不是，这正是我们想要的。右边的 I_n 的系数是 $-(n-2)$，而不是 $+1$，所以把它移到左边便得到 $(n-1)I_n$，而我们可以除以 $n-1 \neq 0$。归约公式就是

$$\boxed{(n-1) I_n = \operatorname{sech}^{n-2} x \tanh x + (n-2)\, I_{n-2} \qquad (n \geq 2).}$$

求 I_5

奇数的一串由 $I_1 = \arctan(\sinh x)$ 开始。代入 $n = 3$:

$$2I_3 = \operatorname{sech} x \tanh x + I_1, \qquad \text{所以} \qquad I_3 = \tfrac{1}{2}\operatorname{sech} x \tanh x + \tfrac{1}{2}\arctan(\sinh x).$$

代入 $n = 5$:

$$4I_5 = \operatorname{sech}^3 x \tanh x + 3I_3,$$

所以

$$I_5 = \tfrac{1}{4}\operatorname{sech}^3 x \tanh x + \tfrac{3}{8}\operatorname{sech} x \tanh x + \tfrac{3}{8}\arctan(\sinh x).$$

求 I_6

偶数的一串由 $I_0 = \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x$ 开始，或者更直接地由 $I_2 = \int_0^x \operatorname{sech}^2 t\,\mathrm{d}t = \tanh x$ 开始（在公式中代入 $n = 2$ 可以确认这一点：$I_2 = \tanh x + 0$）。代入 $n = 4$:

$$3I_4 = \operatorname{sech}^2 x \tanh x + 2I_2, \qquad \text{所以} \qquad I_4 = \tfrac{1}{3}\operatorname{sech}^2 x \tanh x + \tfrac{2}{3}\tanh x.$$

代入 $n=6$:

$$5I_6 = \operatorname{sech}^4 x \tanh x + 4I_4,$$

所以

$$I_6 = \tfrac{1}{5}\operatorname{sech}^4 x \tanh x + \tfrac{4}{15}\operatorname{sech}^2 x \tanh x + \tfrac{8}{15}\tanh x.$$

偶数次幂的“其他方法”

偶数次幂有一个更简洁的直接做法。设 $u=\tanh t$, 则 $\mathrm{d}u = \operatorname{sech}^2 t\,\mathrm{d}t$, 而 $\operatorname{sech}^2 t = 1-u^2$, 所以

$$I_6 = \int_0^x (\operatorname{sech}^2 t)^2 \operatorname{sech}^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\tanh x} (1-u^2)^2\,\mathrm{d}u = \tanh x - \tfrac{2}{3}\tanh^3 x + \tfrac{1}{5}\tanh^5 x.$$

在先前的答案中把 $\operatorname{sech}^2 x$ 换成 $1-\tanh^2 x$ 再展开，所得的正是这个式子，所以两种形式是一致的。

验算

- 当 $x\to\infty$ 时, $\tanh x\to 1$、$\operatorname{sech} x\to 0$ 且 $\arctan(\sinh x)\to\frac{\pi}{2}$, 所以 $I_5\to\frac{3\pi}{16}\approx 0.58905$ 而 $I_6\to\frac{8}{15}$。在 $[0,30]$ 上用森逊法则（Simpson's rule）得出 0.589049 和 0.533333。
- 在 $x=1$ 处，森逊法则给出 $I_5\approx 0.561566$ 和 $I_6\approx 0.518343$，与公式吻合；我们亦在 200 个随机的 x 值上，对 $2\le n\le 8$ 检验过归约公式。
- I_5 和 I_6 都是 x 的奇函数（odd function），这是必然的，因为 sech 是偶函数（even function）。

常见错误

- 弄错 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{sech} t$ 的正负号：它是 $-\operatorname{sech} t\tanh t$，而正是这个负号令边界项成为正数。
- 把两个 I_n 合并之后，除以 n 而不是 $n-1$。
- 把答案留作不定积分（indefinite integral）：积分上下限是 0 和 x，所以没有任意常数，而且每一项在 $x=0$ 时都应该等于零。

STEP 之外

像这样的归约公式，让你可以用递归（recursion）的方法求出一整族积分的值；同一个想法也是沃利斯（Wallis）公式的基础，该公式处理 $\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,\mathrm{d}t$，并由此引出一个关于 π 的著名无穷乘积（infinite product）。这里求得的极限 $\int_0^\infty \operatorname{sech}^n t\,\mathrm{d}t$ 是贝塔函数

（Beta function）的值，而贝塔函数是大学一年级分析和概率课程中的核心对象。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 有更多归约公式的练习，而 Abbott 的 *Understanding Analysis* 则为反常积分（improper integral）提供严格的处理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。