详细解答

STEP II 1994，第 9 题

力学 • 刚体的平衡

STEP II 1994，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/94-s2-q9

关键思路

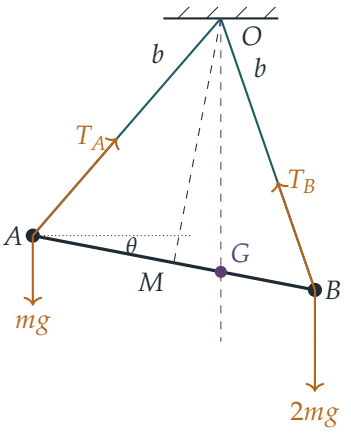
把杆、两条绳和两个质点视为一个刚体（rigid body）。作用于它的外力只有两个重量和 O 点的支承力，因此要达致平衡（equilibrium），作用于质心（centre of mass）G 的合重量，其作用线必须通过 O：即 G 悬于 O 的正下方。这样一来，求角度就变成纯粹的等腰三角形几何问题。至于张力（tension），则对 B 取力矩（moments），这样可消去作用于 B 的两个未知力。

解答

模型。杆和绳都是轻的，绳不可伸长，而 A、B 是质点（particles）。由于 $OA = OB = b$ 且 $AB = 2a$，三角形 OAB 是等腰三角形。设 M 为 AB 的中点；则 $OM \perp AB$，并由毕氏定理（Pythagoras）得

$$OM = h = \sqrt{b^2 - a^2}.$$

较重的质点 B 悬得较低，杆与水平线成角 θ。



角度

考虑整个系统：杆、绳和质点合在一起。作用于它的外力是 A 处的重量 mg、B 处的重量 $2mg$，以及 O 点支承所施的力。对 O 取力矩，支承力没有力矩，所以两个重量对 O 的总力矩必须为零。两个重量互相平行，故可合成为一个通过两质点质心 G 的单一力 $3mg$。它对 O 的力矩为零，当且仅当 G 位于通过 O 的铅垂线上。所以 G 在 O 的正下方。

现在求 G 的位置。它在 AB 上，且 $AG : GB = 2m : m = 2 : 1$，所以 $AG = \frac{2}{3} \cdot 2a = \frac{4a}{3}$，因此

$$MG = AG - AM = \frac{4a}{3} - a = \frac{a}{3},$$

而 G 在 M 靠近 B 的一侧。

想一想 为甚么角 MOG 等于 θ?

OG 是铅垂的，而 OM 垂直于杆。把铅垂线旋转到 OM 上的旋转，正是把水平线转到杆上的那个旋转，所以 OG 与 OM 之间的夹角等于杆与水平线之间的夹角，即 θ。

三角形 OMG 在 M 处是直角，所以

$$\tan\theta = \frac{MG}{OM} = \frac{a/3}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{a}{3\sqrt{b^2 - a^2}},$$

正如所求。

AO 的张力

再次把杆和质点合起来考虑。作用于这个系统的力是沿 AO 的 T_A、沿 BO 的 T_B，以及两个重量。（杆内的力是内力。）对 B 取力矩，便可消去 T_B 和重量 $2mg$。

由 B 到直线 OA 的垂直距离，等于三角形 OAB 面积的两倍除以 OA。该面积为 $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h = ah$，所以这距离是 $2ah/b$。A 处重量 mg 的力臂（moment arm）等于 A 与 B 之间的水平

距离，即 $2a\cos\theta$。这两个力矩方向相反，令它们互相平衡，得

$$T_A \cdot \frac{2ah}{b} = mg \cdot 2a\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad T_A = \frac{mgb\cos\theta}{h}.$$

由 $\tan\theta = \dfrac{a}{3h}$，且 θ 为锐角，可得 $\cos\theta = \dfrac{3h}{\sqrt{9h^2+a^2}}$，而 $9h^2 + a^2 = 9b^2 - 8a^2$。因此

$$T_A = \frac{mgb}{h} \cdot \frac{3h}{\sqrt{9b^2-8a^2}} = \frac{3mgb}{\sqrt{9b^2-8a^2}}.$$

（以同样的论证对 A 取力矩，可得 $T_B = 2T_A$：每条绳的张力与它所支承的质量成正比。）

验算

- 若 $a \to 0$，两条绳变成铅垂，而 $T_A \to 3mgb/(3b) = mg$，正好是质点 A 所需的张力。
- 对整个系统沿铅垂方向分解力（resolving），结果应为 $3mg$。取 $a=1$、$b=2$、$m=1$、$g=9.8$，得 $T_A \approx 11.11\,\mathrm{N}$ 和 $T_B \approx 22.22\,\mathrm{N}$。把它们沿绳的方向分解，铅垂分量的总和为 $29.4\,\mathrm{N} = 3mg$。
- 以数值方法验算：随机选取 2000 组 (a,b,m)，把杆置于所预测的角度，然后分别对每个质点求解力的平衡。两个质点所得的杆内力一致，而且是推力（thrust），张力则与公式相符，误差约为 10^{-15}。

常见错误

- 把 G 放在距离 M 为 $\frac{2a}{3}$ 之处，或放在错误的一侧。质心较接近较重的质点，与中点相距 $\frac{a}{3}$。
- 把 T_A 对 B 的力臂当作 $2a$ 或 b。所需的是由 B 到直线 OA 的垂直距离。
- 答案仍以 θ 表示，但题目要求以 m、g、a 和 b 表示。

STEP 之外

从一点自由悬挂的物体，静止时质心必在该点的正下方；这个原理其实是一个更深刻事实的最简单情况：稳定平衡使势能（potential energy）取最小值，而这里的势能不过是 $3mg$ 乘以 G 的高度。到了大学，这会发展成虚功原理（virtual work principle）和拉格朗日力学（Lagrangian mechanics），当中求平衡位置的方法是对能量求导，而不是分解力。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对刚体静力学和能量方法有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。