详细解答

STEP II 1994，第 8 题

纯数学 · 二次模型的最优化

> **STEP II 1994，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q8

关键思路

追踪一个送货周期内的金钱流向。存货以稳定的速率 r 减少，直至售罄为止，所以 $S(t)$ 只是一条简单的斜线，而仓租就是 b 乘以这条斜线下的面积。于是每个周期的利润是 X 的二次函数（quadratic）。在容许范围 $0 < X \le rT$ 内求它的最大值，便得出所需条件，而假设 $T \ge p/b$ 的作用，正是令抛物线（parabola）的顶点（vertex）落在这个范围之内。

解答

为何 $X \le rT$

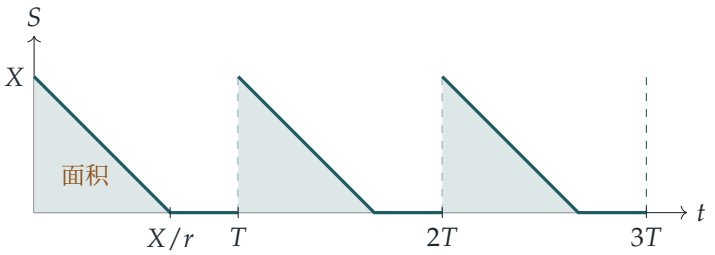
在 T 小时内，她最多只能卖出 rT 件货。若 $X > rT$，下一辆货车到达时，货架上至少仍有 $X - rT$ 件货。此后每个周期都会令这批卖不出的剩货至少再增加 $X - rT$ 件，所以经过 n 个周期后，剩货至少有 $n(X - rT)$ 件。这个数量会无止境地增长，按每件每小时 b 计算的仓租亦然。她要为这些货品付款（还要付仓租），但它们不会带来额外的销售，因为每个周期的销量无论如何都以 rT 为上限。因此每次订货多于 rT 只会增加成本，她应取 $X \le rT$。

存货量

当 $X \le rT$ 时，每个周期开始时恰好有 X 件货。在连续模型（continuous model）中，只要有存货，她便以速率 r 售货，所以

$$S(t) = \begin{cases} X - rt, & 0 \le t \le X/r, \\ 0, & X/r \le t \le T. \end{cases}$$

图像是一条直线，由 X 下降至 $t = X/r$ 时的零，然后保持在零，直到 $t = T$ 下一次送货为止（届时跳回 X）。经过数个周期，便形成锯齿形的图像。



每个周期的利润

在长 T 小时的一个周期内：

- 销售。全部 X 件货都会售出（因为 $X \le rT$），每件售 $£(p+q)$，收入为 $£(p+q)X$。
- 送货。$£(a+qX)$。
- 仓租。在一段短时间 δt 内存放 $S(t)$ 件货的费用为 $bS(t)\,\delta t$，所以总数是

$$b\int_0^T S(t)\,\mathrm{d}t = b\int_0^{X/r}(X-rt)\,\mathrm{d}t = b\cdot\tfrac{1}{2}\cdot X\cdot\frac{X}{r} = \frac{bX^2}{2r},$$

  即阴影三角形的面积乘以 b。
- 营运开支。$£cT$。

含 qX 的项互相抵销，所以每个周期的利润是

$$P(X) = pX - \frac{bX^2}{2r} - a - cT.$$

可见 p 才是每件货的真正利润：q 只是转嫁给顾客而已。

生意何时可以有利可图?

T 固定时，她可以在 $0 < X \le rT$ 的范围内选择 X。配方（completing the square）后，

$$P(X) = \frac{p^2 r}{2b} - a - cT - \frac{b}{2r}\left(X - \frac{pr}{b}\right)^2.$$

想一想 最佳的 X 真的在容许范围之内吗?

抛物线在 $X = pr/b$ 处达到最高点，而我们需要 $pr/b \le rT$，即 $T \ge p/b$。这正是题目的假设。所以她可以选 $X = pr/b$，此时

$$P = \frac{p^2 r}{2b} - (a + cT).$$

这个值为正，当且仅当 $p^2r > 2b(a+cT)$，即

$$p^2 > 2\,\frac{(a+cT)b}{r}.$$

因此，若这个不等式（inequality）成立，订货量 $X = pr/b$ 便能令生意有利可图，这正是所要证明的。（事实上 pr/b 是最佳的选择，所以当 $T \geq p/b$ 时，这个条件也是必要的。）

反之，若 $T < p/b$，顶点便落在 rT 之外。这时 P 在整个容许范围内都是递增的，她最多只能取 $X = rT$。这就是为何要得出这个条件，必须有关于 T 的假设。

验算

- 取 $a = 10$、$b = 1$、$r = 10$、$p = 4$、$c = 1$、$T = 5$。则 $T \geq p/b = 4$，且 $p^2 = 16 > 2(15)(1)/10 = 3$。最佳订货量为 $X = 40 \leq rT = 50$，利润为 $160 - 10 - 80 - 5 = 65 = \frac{16\cdot 10}{2} - 15$。
- 电脑就 30 组随机参数，以数值方法逐步计算一个周期内的 $S(t)$，结果与 $P(X)$ 相差不超过 10^{-7}。另就 2000 个满足 $T \geq p/b$ 的随机个案，对 X 作网格搜索，证实最大值为 $\frac{p^2r}{2b} - a - cT$。
- 单位：p^2r/b 的单位是 $(£/件)^2 \times (件/小时)/(£/件/小时) = £$，与 a 和 cT 相同。

常见错误

- 把全部 X 件货在整整 T 小时内的仓租都计算在内（即 bXT），而不是按实际存货量计算的 $b\int S\,\mathrm{d}t$。
- 忘记检查 $X = pr/b$ 是否满足 $X \leq rT$。整道题只有这一步用到条件 $T \geq p/b$。

STEP 之外

这是运筹学（operations research）中经典的经济订货量（economic order quantity）模型。在每次订货的固定成本与每件货每单位时间的存货成本之间取得平衡，会得出一条平方根法则。在本题中，若她还可以选择 T，则要令利润率 P/T 最大，便须在 a 与仓租之间作出取舍。这类约束优化（constrained optimisation）问题（这里是顶点与边界 $X = rT$ 之间的比较）进一步发展下去，便是线性规划（linear programming）、非线性规划（nonlinear programming）以及 Karush–Kuhn–Tucker 条件。若想养成建立和检验这类模型的习惯，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 是很好的参考书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。