详细解答

STEP II 1994，第 7 题

纯数学 · 阿波罗尼奥斯圆

> **STEP II 1994，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q7

关键思路

从距离 r 处观看高度为 h 的旗杆顶，仰角（angle of elevation）的正切是 h/r，所以“仰角相等”其实只是说：士兵与两个杆脚的距离保持固定比 $h_1 : h_2$。把这个条件两边平方，得到的方程正好是第一部分的形式，因此轨迹（locus）是一个圆（即阿波罗尼奥斯圆（circle of Apollonius））。至于最后一部分，把旗杆放在一般位置，并把每个圆心写成两个杆脚的加权组合；恒等式便自然得出，而且其系数之和为零，正是这一点保证了三点共线（collinear）。

解答

圆

由于 $a > 0$，我们可以除以 a，然后配方（complete the square）：

$$x^2 + y^2 + \frac{2g}{a}x + \frac{2f}{a}y + \frac{c}{a} = 0 \iff \left(x + \frac{g}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{f}{a}\right)^2 = \frac{g^2 + f^2 - ac}{a^2}.$$

因为 $f^2 + g^2 > ac$，右边是正数，所以这是一个圆，其

$$\text{圆心为} \left(-\frac{g}{a}, -\frac{f}{a}\right), \qquad \text{半径为} \frac{\sqrt{g^2 + f^2 - ac}}{a}.$$

（若没有这个条件，这个“圆”便会是单独一点，或者是空集。）

两支旗杆

把高度为 h_1 的旗杆的杆脚放在原点，另一支的杆脚放在 $(d, 0)$。若士兵位于 (x, y)，与两个杆脚的距离分别是 r_1 和 r_2，则仰角 θ_1, θ_2 满足 $\tan\theta_i = h_i / r_i$。两个角都在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之内，

而 tan 在这个区间上是一对一（one-to-one）的，所以

$$\theta_1 = \theta_2 \iff \frac{h_1}{r_1} = \frac{h_2}{r_2} \iff h_2^2 r_1^2 = h_1^2 r_2^2,$$

最后一步可以逆推，因为所有量都是正数。（士兵不可能站在杆脚上：$r_1 = 0$ 会迫使 $r_2 = 0$ 同时成立。）所以路径是

$$h_2^2(x^2 + y^2) = h_1^2((x-d)^2 + y^2) \iff (h_2^2 - h_1^2)(x^2 + y^2) + 2h_1^2 d\,x - h_1^2 d^2 = 0.$$

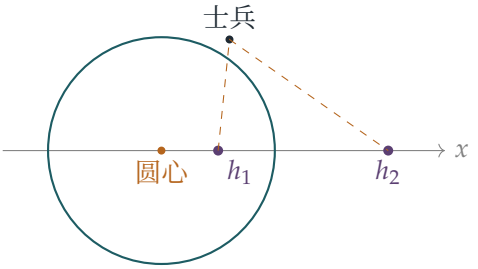
为旗杆编号，使得 $h_2 > h_1$（若两者高度不同，总有一支较高）。这样，上式就是第一部分的方程，其中

$$a = h_2^2 - h_1^2 > 0, \quad g = h_1^2 d, \quad f = 0, \quad c = -h_1^2 d^2,$$

而且

$$g^2 + f^2 - ac = h_1^4 d^2 + (h_2^2 - h_1^2) h_1^2 d^2 = h_1^2 h_2^2 d^2 > 0.$$

所以士兵沿着一个圆步操，圆心为 $\left(-\dfrac{h_1^2 d}{h_2^2 - h_1^2}, 0\right)$，半径为 $\dfrac{h_1 h_2 d}{h_2^2 - h_1^2}$。圆心位于通过两个杆脚的直线上，在较矮旗杆的外侧。这个圆围绕着较矮的旗杆，这很合理：要令矮杆看起来与高杆一样高，就必须站得离它近一些。



（图中取 $h_1 = 1$，$h_2 = 2$，$d = 3$：圆心是 $(-1, 0)$，半径是 2。）

若 $h_1 = h_2$，$x^2 + y^2$ 的项互相抵消，方程变成 $2h_1^2 d\,x = h_1^2 d^2$，即 $x = \frac{1}{2}d$。士兵沿着连接两个杆脚的线段的垂直平分线（perpendicular bisector）行走，那是一条直线而不是圆。这正是上述各圆的极限情况：当 $h_2 \to h_1$ 时，半径趋向无限大。

三支旗杆

现在我们无法把三个杆脚全部放在同一条坐标轴上，所以设高度为 h_i 的旗杆立于 $\mathbf{p}_i = (p_i, q_i)$。以 $r_i^2 = (x - p_i)^2 + (y - q_i)^2$ 重复上面的论证，负责旗杆 i 和 j 的士兵所走的路径是

$$(h_j^2 - h_i^2)(x^2 + y^2) - 2(h_j^2 p_i - h_i^2 p_j)x - 2(h_j^2 q_i - h_i^2 q_j)y + \text{常数} = 0.$$

这是一个圆（移动原点不会改变 g^2+f^2-ac 的值，所以它仍然是 $h_i^2h_j^2|\mathbf{p}_i-\mathbf{p}_j|^2>0$；若 $h_j<h_i$，则先把全式乘以 -1）。利用第一部分，其圆心 $\mathbf{c}_{ij}=(x_{ij},y_{ij})$ 满足

$$(h_j^2-h_i^2)\,\mathbf{c}_{ij}=h_j^2\mathbf{p}_i-h_i^2\mathbf{p}_j.$$

把 i 和 j 对调，这条式子不变（两边同时变号），所以 $\mathbf{c}_{31}$ 的下标次序怎样写都没有关系。

> **想一想** 怎样不必解出任何未知量，就把三条这样的公式变成题目给出的恒等式?

恒等式中每一项在 x_{ij} 旁边都已经有因子 $\pm(h_j^2-h_i^2)$，所以我们可以直接代入上面的公式，并使用向量，把 x 坐标和 y 坐标一并处理：

$$\begin{aligned}
h_3^2(h_1^2-h_2^2)\,\mathbf{c}_{12}&=-h_3^2(h_2^2\mathbf{p}_1-h_1^2\mathbf{p}_2)=-h_2^2h_3^2\,\mathbf{p}_1+h_1^2h_3^2\,\mathbf{p}_2,\\
h_1^2(h_2^2-h_3^2)\,\mathbf{c}_{23}&=-h_1^2(h_3^2\mathbf{p}_2-h_2^2\mathbf{p}_3)=-h_1^2h_3^2\,\mathbf{p}_2+h_1^2h_2^2\,\mathbf{p}_3,\\
h_2^2(h_3^2-h_1^2)\,\mathbf{c}_{31}&=\;\;h_2^2(h_3^2\mathbf{p}_1-h_1^2\mathbf{p}_3)=\;\;h_2^2h_3^2\,\mathbf{p}_1-h_1^2h_2^2\,\mathbf{p}_3.
\end{aligned}$$

三式相加，各项两两抵消，所以

$$h_3^2(h_1^2-h_2^2)\,\mathbf{c}_{12}+h_1^2(h_2^2-h_3^2)\,\mathbf{c}_{23}+h_2^2(h_3^2-h_1^2)\,\mathbf{c}_{31}=\mathbf{0}.$$

其 x 分量就是所求的 x_{ij} 之间的关系式，而 y 分量则是 y_{ij} 之间的同一关系式。

> **想一想** 为甚么三点之间有一个线性关系，就能令它们共线?

把三个系数记为 $A=h_3^2(h_1^2-h_2^2)$，$B=h_1^2(h_2^2-h_3^2)$，$C=h_2^2(h_3^2-h_1^2)$。各高度都是正数而且互不相同，所以 A,B,C 全都不是零。关键的额外事实是它们的和为零：

$$A+B+C=h_1^2h_3^2-h_2^2h_3^2+h_1^2h_2^2-h_1^2h_3^2+h_2^2h_3^2-h_1^2h_2^2=0.$$

所以 $C=-A-B$，关系式变成

$$A(\mathbf{c}_{12}-\mathbf{c}_{31})+B(\mathbf{c}_{23}-\mathbf{c}_{31})=\mathbf{0},\qquad\text{所以}\qquad\mathbf{c}_{12}-\mathbf{c}_{31}=-\frac{B}{A}\,(\mathbf{c}_{23}-\mathbf{c}_{31}).$$

由 $\mathbf{c}_{31}$ 指向另外两个圆心的向量互相平行（或者其中一个是零向量，若有两个圆心重合），所以三个圆心位于同一条直线上。假如没有 $A+B+C=0$，一个线性关系根本证明不了甚么：任意三点都满足某个这类的关系。

验算

- 取 $h_1=1$，$h_2=2$，$d=3$，我们的公式给出圆心 $(-1,0)$ 和半径 2。点 $(1,0)$ 与两个杆脚的距离是 1 和 2，而 $(-3,0)$ 的距离是 3 和 6：两者之比都是 $1:2$，正如所料。

- 我们做了一次数值检验：在每个圆上随机取点，确认两个仰角相等。此外，对 2000 组位置随机的三支旗杆，也确认了恒等式成立，以及三个圆心共线。
- 预期共线的另一个理由：若某点同时在其中两个圆上，则 $r_1 : r_2 = h_1 : h_2$ 且 $r_2 : r_3 = h_2 : h_3$，所以 $r_1 : r_3 = h_1 : h_3$，它也在第三个圆上。当这些圆相交时，它们全都通过相同的两点，所以它们的圆心全都在这两点的垂直平分线上。

常见错误

- 直接写 $h_1/r_1 = h_2/r_2$，却没有说明为何仰角相等就得出正切相等（两个角都是锐角）。
- 忘记检查 $g^2 + f^2 > ac$：第一部分只在这个条件下才给出一个圆。
- 单凭恒等式就推断共线，而没有用到 $A + B + C = 0$ 和 $A, B, C \neq 0$。

STEP 之外

与两个定点的距离成固定比 $k \neq 1$ 的点所组成的集合，是一个*阿波罗尼奥斯圆*。取遍 k 的所有值，便得到一个*共轴圆系*（*coaxal system*），即其中任意两个圆都有相同根轴（radical axis）的一族圆。这类圆族正是反演几何（inversive geometry）的起点；在复平面上，它们就是圆 $|z - a| = k|z - b|$，而莫比乌斯变换（Möbius transformation）会把这些圆互相映射。Coxeter 与 Greitzer 的 *Geometry Revisited*（重温几何）涵盖共轴圆和反演；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（视觉化的复分析）则展示复数方面的观点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。