详细解答

STEP II 1994，第 6 题

纯数学 · 三角函数裂项相消级数

> **STEP II 1994，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q6

关键思路

一切都建基于一条小小的恒等式（identity）：$\tan x = \cot x - 2\cot 2x$。它把和式中的每一项化为形如 $\frac{1}{2^r}\cot\frac{\theta}{2^r}$ 的相邻两项之差，于是和式可以裂项相消（telescope），而归纳步骤之所以行得通，靠的也正是这条恒等式。至于无穷和，只需用到极限（limit）$\frac{\sin\varphi}{\varphi}\to 1$。

解答

一条有用的恒等式

对任何使 $\sin x$、$\cos x$ 和 $\sin 2x$ 皆不为零的 x，

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\cot 2x,$$

所以

$$\tan x = \cot x - 2\cot 2x. \qquad (*)$$

我们只会在 $x = \theta/2^r$（其中 $r \geq 1$）的情况下使用 $(*)$。由于 $0 < \theta < \pi$，这样的 x 必在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之内，因此 $\sin x$、$\cos x$ 和 $\sin 2x$ 全为正数，我们写下的每一个 tan 和 cot 都有定义。

以归纳法求有限和

以 S_n 表示左方 $\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2^r}\tan\frac{\theta}{2^r}$，并设 $P(n)$ 为命题

$$S_n = \frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} - \cot\theta.$$

基础情况 $n=1$。在 $(*)$ 中代入 $x=\theta/2$，再除以二：

$$S_1=\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{\theta}{2}=\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{\theta}{2}-\cot\theta,$$

这就是 $P(1)$。

归纳步骤。假设 $P(k)$ 对某个 $k\geq 1$ 成立。在 $(*)$ 中代入 $x=\theta/2^{k+1}$，于是 $2x=\theta/2^k$，再除以 2^{k+1}：

$$\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{\theta}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\theta}{2^{k+1}}-\frac{1}{2^k}\cot\frac{\theta}{2^k}.$$

把此式与 $P(k)$ 相加，

$$\begin{aligned}S_{k+1}&=S_k+\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{\theta}{2^{k+1}}\\&=\left(\frac{1}{2^k}\cot\frac{\theta}{2^k}-\cot\theta\right)+\left(\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\theta}{2^{k+1}}-\frac{1}{2^k}\cot\frac{\theta}{2^k}\right)\\&=\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\theta}{2^{k+1}}-\cot\theta,\end{aligned}$$

这就是 $P(k+1)$。根据数学归纳法（induction），$P(n)$ 对所有 $n\geq 1$ 和所有 $\theta\in(0,\pi)$ 成立，命题得证。

想一想 假如你从未见过恒等式 $(*)$，怎样才能把它找出来？

从归纳法倒推回去。由 $n=k$ 到 $n=k+1$，右方的变化是 $\frac{1}{2^{k+1}}\cot\frac{\theta}{2^{k+1}}-\frac{1}{2^k}\cot\frac{\theta}{2^k}$，左方的变化是 $\frac{1}{2^{k+1}}\tan\frac{\theta}{2^{k+1}}$。乘以 2^{k+1} 并记 $x=\theta/2^{k+1}$，可见两边的变化相等，当且仅当 $\tan x=\cot x-2\cot 2x$。换言之，题目本身已告诉你要证明哪一条恒等式；之后只需用倍角公式（double-angle formulae）验证便可。

无穷和

各项全为正数，而且我们已有部分和（partial sums）的精确公式，所以只需求出 S_n 在 $n\to\infty$ 时的极限。设 $\varphi_n=\theta/2^n$，则 $\varphi_n\to 0^+$ 且 $\frac{1}{2^n}=\frac{\varphi_n}{\theta}$。于是

$$\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n}=\frac{\varphi_n}{\theta}\cdot\frac{\cos\varphi_n}{\sin\varphi_n}=\frac{1}{\theta}\cdot\frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n}\cdot\cos\varphi_n\longrightarrow\frac{1}{\theta}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{\theta},$$

这里用到了标准极限：当 $\varphi\to 0$ 时，$\frac{\sin\varphi}{\varphi}\to 1$ 及 $\cos\varphi\to 1$。由于 $\cot\theta$ 与 n 无关，

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{2^r}\tan\frac{\theta}{2^r}=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{\theta}-\cot\theta,$$

这正是所求的结果。特别地，此级数（series）对所有 $\theta\in(0,\pi)$ 均收敛（converge）。

想一想 为甚么可以说“无穷和等于 S_n 的极限”？

这正是无穷级数之和的定义：$\sum_{r=1}^{\infty}a_r$ 的意思就是 $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}a_r$，前提是该极限存在。我们已把极限算了出来，从而证明它存在，所以毋须再做其他工夫。

验算

- $\theta = \frac{\pi}{2}$：右方为 $\frac{2}{\pi} - 0 \approx 0.63662$。以数值方法把级数的首 60 项相加，同样得到 0.6366198。
- $\theta = 1$：级数与 $1 - \cot 1$ 均得 0.3579074。
- θ 很小时：$\tan \frac{\theta}{2^r} \approx \frac{\theta}{2^r}$，所以级数约为 $\theta \sum 4^{-r} = \frac{\theta}{3}$。这与展开式 $\frac{1}{\theta} - \cot\theta = \frac{\theta}{3} + O(\theta^3)$ 吻合。
- 当 $\theta \to \pi^-$ 时，$\cot\theta \to -\infty$，而首项 $\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} \to +\infty$，所以两边同时趋向无穷大，正如所料。

常见错误

- 把 $(*)$ 中的因子 2 弄错，例如写成 $\tan x = \cot x - \cot 2x$。可用 $x = \frac{\pi}{4}$ 检验：$1 = 1 - 2\cdot 0$。
- 因为 $\frac{1}{2^n} \to 0$ 便声称 $\frac{1}{2^n}\cot\frac{\theta}{2^n} \to 0$。余切的增长速度与 $2^n/\theta$ 相若，所以乘积趋向 $\frac{1}{\theta}$，而不是 0。
- 忘记说明为何各个正切和余切都有定义：正是条件 $0 < \theta < \pi$ 确保每一个角 $\theta/2^r$ 都在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之内。

STEP 之外

函数 $\frac{1}{\theta} - \cot\theta$ 属于一个著名的家族：对部分分式展开（partial-fraction expansion）$\cot\theta = \frac{1}{\theta} + \sum_{k\geq 1}\frac{2\theta}{\theta^2 - k^2\pi^2}$ 求导，可得巴塞尔和（Basel sum）$\sum 1/k^2 = \pi^2/6$，而欧拉（Euler）正是从 $\sin\theta$ 的无穷乘积（infinite product）得出这类结果。对韦达（Viète）乘积 $\frac{\sin\theta}{\theta} = \prod_{r\geq 1}\cos\frac{\theta}{2^r}$ 取对数再求导，恰好得到本题的级数，这是理解此结果的另一途径。如何令这类对无穷和与无穷乘积的运算变得严谨，是大学一年级分析（analysis）课程的课题；可参阅 Abbott, *Understanding Analysis*（一本数学分析入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。