详细解答

STEP II 1994，第 5 题

纯数学 · 实根的计数

> **STEP II 1994，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q5

关键思路

要数 $f(x) = c$ 有多少个根（root），即是问水平线 $y = c$ 与 f 的图像相交多少次，所以关键在于 f 的形状：它在哪里取最小值，在哪里递增、在哪里递减。本题的每个式子都由两个关于某个中心点对称的括号组成。把变量平移，使中心点变成原点，则奇次项互相抵消（四次方的情况）或偶次项互相抵消（三次方的情况），图像的形状便一目了然。

解答

第 (i) 部分

用二项式定理（binomial theorem）展开。在 $(x+1)^4$ 和 $(x-1)^4$ 中，x 的奇次项符号相反，所以相加时互相抵消：

$$f(x) = (x-1)^4 + (x+1)^4 = 2(x^4 + 6x^2 + 1) = 2x^4 + 12x^2 + 2.$$

因此 f 是偶函数（even function），而且 $f(x) = 2 + 2x^4 + 12x^2 \geq 2$，等号只在 $x = 0$ 时成立。对于 $x \geq 0$，当 $x > 0$ 时 $f'(x) = 8x^3 + 24x > 0$，所以 f 在 $[0, \infty)$ 上严格递增（strictly increasing），而且当 $x \to \infty$ 时 $f(x) \to \infty$。由于 f 是连续（continuous）的，它在 $[0, \infty)$ 上取 $[2, \infty)$ 中的每个值恰好一次；根据对称性，它在 $(-\infty, 0]$ 上亦然。

- 若 $c > 2$：恰有一个根 $x = a > 0$，于是 $x = -a$ 是第二个根；这两个根互不相同，此外再无其他根。所以**恰好有两个**实根。
- 若 $c = 2$：由 $f(x) = 2$ 必得 $2x^4 + 12x^2 = 0$，所以 $x = 0$ 是**唯**一的根。
- 若 $c < 2$：对所有 x 都有 $f(x) \geq 2 > c$，所以**没有**根。

这正是题目所要求的结论。

（另一做法：$2x^4+12x^2+2-c=0$ 是关于 $u=x^2$ 的二次方程，其根为 $u=-3\pm\sqrt{8+c/2}$；只有取 $+$ 号的根才可能非负，而它是正数、零还是负数，分别对应 $c>2$、$c=2$ 和 $c<2$。）

第 (ii) 部分

括号 $x-3$ 和 $x-1$ 以 $x=2$ 为中心，所以设 $y=x-2$。于是

$$(x-3)^4+(x-1)^4=(y-1)^4+(y+1)^4,$$

这正是第 (i) 部分的式子，只是变量换成了 y。由于 $x\mapsto y=x-2$ 是实数之间的一一对应（one-to-one correspondence），这个方程的实根数目与第 (i) 部分相同：

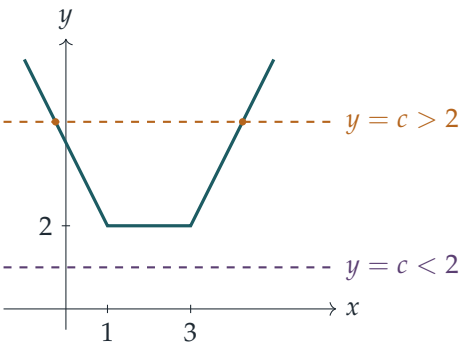
$$\text{有两个根，若}c>2,\qquad \text{有一个根}(x=2)\text{，若}c=2,\qquad \text{没有根，若}c<2.$$

第 (iii) 部分

设 $g(x)=|x-3|+|x-1|$，并在 $x=1$ 和 $x=3$ 所分出的三个区间上分别去掉绝对值（modulus）符号：

$$g(x)=\begin{cases}(3-x)+(1-x)=4-2x, & x<1,\\ (3-x)+(x-1)=2, & 1\le x\le 3,\\ (x-3)+(x-1)=2x-4, & x>3.\end{cases}$$

所以图像是一个平底的 V 形：在 1 与 3 之间恒等于 2，在左边严格递减，在右边严格递增，而且在 $[1,3]$ 之外 $g>2$。



- 若 $c<2$：处处都有 $g(x)\ge 2>c$，所以**没有**根。
- 若 $c=2$：凡满足 $1\le x\le 3$ 的 x 都是根，此范围以外则没有根，所以有**无穷多个**根。

- 若 $c > 2$：在 $[1,3]$ 内没有根；在 $x < 1$ 上，由 $4 - 2x = c$ 得 $x = 2 - \frac{c}{2}$，由于 $c > 2$，它确实小于 1；在 $x > 3$ 上，由 $2x - 4 = c$ 得 $x = 2 + \frac{c}{2} > 3$。所以**恰好有两个**根，即 $x = 2 \pm \frac{c}{2}$。

> ? **想一想** 为甚么 $c = 2$ 时的答案与第 (ii) 部分相差这么远?

对于四次方，由于两项都是严格凸（strictly convex）的，它们的和在中心点有唯一而尖锐的最小值。对于绝对值，当 x 在 1 与 3 之间移动时，其中一个距离增加多少，另一个距离便恰好减少多少，所以它们的和在整个区间上都保持为 2（即 1 与 3 之间的距离）。

第 (iv) 部分

同样设 $y = x - 2$。对于三次方，互相抵消的是 y 的偶次项：

$$(x-3)^3 + (x-1)^3 = (y-1)^3 + (y+1)^3 = 2y^3 + 6y.$$

设 $h(y) = 2y^3 + 6y$。则对任意实数 y 都有

$$h'(y) = 6y^2 + 6 \geq 6 > 0$$

, 所以 h 在整条实数线上严格递增, 因而每个值最多取一次。此外, 当 $y \to \infty$ 时 $h(y) \to \infty$, 当 $y \to -\infty$ 时 $h(y) \to -\infty$，而 h 是连续的，所以根据介值定理（intermediate value theorem），它取每个实数值至少一次。

因此，对**每一个**实数 c，方程都**恰好有一个**实根。

验算

- 在中心点 $x = 2$，两个四次方的式子都等于 $1 + 1 = 2$，与 $c = 2$ 的情况吻合，而且 $(2-3)^3 + (2-1)^3 = 0$。
- 在第 (iv) 部分, $c = 8$ 应给出 $x = 3$: 的确 $0^3 + 2^3 = 8$, 而取 $y = 1$ 时 $h(1) = 2 + 6 = 8$。
- 在第 (iii) 部分取 $c = 4$，根 $x = 0$ 和 $x = 4$ 分别给出 $3 + 1 = 4$ 和 $1 + 3 = 4$。

我们以数值方法确认了各展开式在随机选取的点上成立，并对一系列 c 值（例如在 (i) 和 (ii) 中取 $c = 1.9$、2.5、100，在 (iv) 中取 c 由 -1000 至 5000），在细密的网格上数算每个函数减去 c 后的变号次数：所得次数分别是 0、2、2，以及恒为 1，与上述结论一致。

常见错误

- 在第 (iii) 部分 $c = 2$ 时答“一个根”或“两个根”：整个区间 $1 \leq x \leq 3$ 上的点全都是根。

- 在第 (iv) 部分，只说三次方程“有一个或三个实根”，却没有判断是哪一种情况。$h'(y) > 0$ 处处成立这一事实便足以定夺。
- 忘记检查 $x = 2 - \frac{c}{2}$ 是否真的落在使用公式 $4 - 2x$ 的区域 $x < 1$ 之内。

STEP 之外

这里的论证建基于两个定理，大学第一门分析（analysis）课程会仔细证明它们：其一是介值定理（区间上的连续函数会取遍两个函数值之间的每一个值），其二是导数为正的函数必定严格递增，这可由中值定理（mean value theorem）推出。第 (iii) 部分亦让你初尝凸性（convexity）和 ℓ^1 距离的滋味：到两点的距离之和，在连接这两点的整条线段上都取得最小值。Abbott 的 *Understanding Analysis* 一书严谨地阐述了这些概念。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。