详细解答

STEP II 1994，第 4 题

纯数学 · 椭圆的面积

> **STEP II 1994，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s2-q4

关键思路

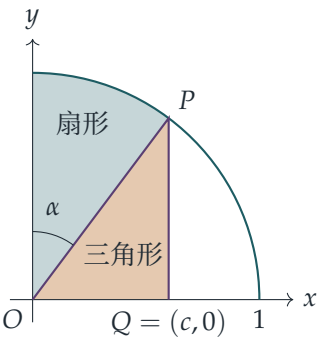
第一个积分是四分之一圆（quarter circle）下方的面积，而这块面积可以干净俐落地分成一个直角三角形和一个扇形（sector），所以毋须作任何代换（substitution）。椭圆（ellipse）是把圆沿两个方向以不同倍数拉伸而成的，而拉伸会把面积乘以一个常数，于是第二个结果立即得出。至于最后一部分，对称性（symmetry）几乎包办了所有工作：两个椭圆互为对直线 $y = x$ 的反射（reflection），所以我们只需求交集（intersection）的八分之一，而这一小块正是第二个结果减去一个三角形。

解答

$(1 - x^2)^{1/2}$ 的积分

所讨论的区域由四分之一圆 $y = (1 - x^2)^{1/2}$、两条坐标轴和直线 $x = c$ 围成。（这条曲线须理解为边界：区域是满足 $0 \le y \le (1 - x^2)^{1/2}$ 和 $0 \le x \le c$ 的点所组成的集合。）它的面积正是我们要求的积分。

设 $P = (c, (1 - c^2)^{1/2})$ 为圆上位于 $x = c$ 上方的点，$Q = (c, 0)$，并设 $\alpha = \sin^{-1} c$，于是 $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$。连接 O 与 P，便把区域分成两块。



- 三角形 OQP 在 Q 处是直角，底为 c，高为 $(1-c^2)^{1/2}$，所以它的面积是 $\frac{1}{2}c(1-c^2)^{1/2}$。
- 余下的部分是单位圆在 OP 与 y 轴之间的扇形。OP 与 y 轴的夹角是 α，因为 P 与 y 轴的水平距离是 $c = 1\cdot\sin\alpha$。半径为 1、角为 α 的扇形，面积是 $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sin^{-1}c$。

把两块相加，

$$\int_0^c (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left[c(1-c^2)^{\frac{1}{2}} + \sin^{-1}c\right], \qquad 0 < c \le 1,$$

正是所求。（当 $c = 1$ 时，三角形退化成一条线段，我们得到四分之一圆的面积 $\frac{\pi}{4}$。）

椭圆下方的面积

同样地，区域位于曲线上半部分 $y = b\left(1 - x^2/a^2\right)^{1/2}$ 之下，其中 $0 \le x \le c$，所以它的面积是

$$\int_0^c b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x.$$

代入 $x = au$，则 $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}u$，积分上下限变成 0 和 c/a（由于 $0 < c \le a$，故 $0 < c/a \le 1$），上式变成

$$ab\int_0^{c/a}(1-u^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{ab}{2}\left[\frac{c}{a}\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \sin^{-1}\left(\frac{c}{a}\right)\right],$$

这里用了第一个结果，并把 c 换成 c/a。这就是所求的面积。

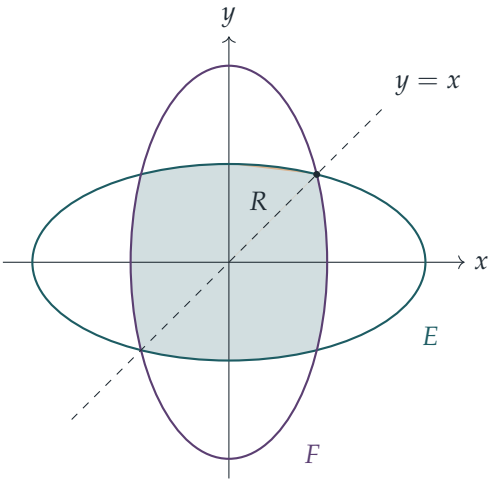
从几何角度看：椭圆是把单位圆沿水平方向拉伸 a 倍、沿垂直方向拉伸 b 倍而成的，而这个拉伸把每一块面积都乘以 ab。

两个椭圆的交集

E 和 F 在 $x \mapsto -x$ 和 $y \mapsto -y$ 之下都保持不变，所以 $E \cap F$ 也是如此，它的面积等于它在象限（quadrant）$x, y \ge 0$ 内那部分面积的四倍。此外，把 x 和 y 对调会把 E 变成 F、把 F 变成 E，所以 $E \cap F$ 对直线 $y = x$ 对称。因此，第一象限内的那四分之一由互为镜像

的两半组成，而

$$\text{面积}(E\cap F)=8\times\text{区域面积}R,\qquad R=\{(x,y)\in E\cap F:\ 0\le x\le y\}.$$



想一想 在 R 之中，两个椭圆里究竟是哪一个构成边界?

对任意一点，

$$\left(\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}\right)-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=(x^2-y^2)\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right).$$

当 $0\le x\le y$ 时，$x^2-y^2\le 0$；又因为 $0<b\le a$，所以 $\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\ge 0$。因此这个差 ≤ 0：在 $y=x$ 的那一侧，E 内的任何一点都自动在 F 内。于是

$$R=\{(x,y)\in E:\ 0\le x\le y\},$$

只有 E 起作用。（这里用到了 $b\le a$；若 $b>a$，两个椭圆的角色便会互换。）

E 的边界在第一象限内与 $y=x$ 相交之处满足 $x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=1$，即交于 $x=y=x_0$，其中

$$x_0=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

当 $0\le x\le x_0$ 时，E 的上半部分位于 $y=x$ 之上或恰在其上（它从高度 $b>0$ 出发，只在 x_0 处与该直线相交），而当 $x>x_0$ 时则位于该直线之下。所以 R 是 $0\le x\le x_0$ 时介乎 $y=x$ 与曲线 $y=b(1-x^2/a^2)^{1/2}$ 之间的区域：

$$\text{面积}(R)=\underbrace{\int_0^{x_0} b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac12}\mathrm{d}x}_{\text{上一个结果，取}c=x_0}-\underbrace{\frac12 x_0^2}_{\text{三角形，位于此线之下：}y=x}.$$

取 $c=x_0$（并且符合所需的条件 $0<x_0<a$），

$$\frac{c}{a}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac12}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \frac{c}{a}\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)^{\frac12}=\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

所以

$$\begin{aligned}\text{面积}(E\cap F) &= 8\,\text{面积}(R)\\ &= 4ab\left[\frac{ab}{a^2+b^2}+\sin^{-1}\Big(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big)\right]-\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}\\ &= 4ab\sin^{-1}\Big(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big),\end{aligned}$$

因为两个代数项恰好互相抵消。这就是所求的面积。

> **想一想** 为甚么代数项会互相抵消?

$\frac{ab}{2}\cdot\frac{c}{a}(1-c^2/a^2)^{1/2}=\frac{1}{2}x_0y_0$ 这一项，是圆的图中那个三角形经拉伸后得到的三角形 O、$(x_0,0)$、(x_0,y_0)。这里 $y_0=x_0$，所以它恰好就是我们减去的、位于 $y=x$ 之下的那个三角形。剩下的是一个经拉伸的扇形，这就是答案只含一个反正弦（inverse sine）的原因。

验算

- 若 $a=b$，两个椭圆是同一个圆，公式给出 $4a^2\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=4a^2\cdot\frac{\pi}{4}=\pi a^2$，与应有的结果相符。
- 当 a 固定而 $b\to 0$ 时，面积的表现近似于 $4ab\cdot\frac{b}{a}=4b^2$：交集几乎就是边长为 $2b$ 的正方形，即 E 那条窄长的水平带与 F 那条窄长的垂直带交叉之处。
- 当 $a=2$、$b=1$ 时，公式给出 $8\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 3.70918$。对两条边界中较低的一条使用辛普森法则（Simpson's rule），得 3.70918；以 2×10^5 个点作蒙地卡罗（Monte Carlo）估算，得 3.707。头两个结果亦已就多组随机的 a、b、c 以数值求积（quadrature）核对过。

常见错误

- 弄错扇形的角：扇形位于 OP 与 y 轴之间，角是 $\sin^{-1}c$，而不是 $\cos^{-1}c$。
- 没有检查是哪一个椭圆围住该区域。在 $0\le x\le y$ 这一半之中，边界是 E，全因 $b\le a$；若选了另一个椭圆，答案中反正弦里面的 b 便会变成 a。

STEP 之外

线性映射（linear map）$(x,y)\mapsto(ax,by)$ 把每一块面积都乘以 ab；一般而言，线性映射会把面积乘以其行列式（determinant）的绝对值。这正是重积分（multiple integrals）变量代换公式（change-of-variables formula）中雅可比（Jacobian）因子的二维情形，你

会在大学一年级的微积分课程中遇到。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）把行列式解释为面积（以及体积）的缩放因子。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。