详细解答

STEP II 1994，第 3 题

纯数学 · 函数方程

STEP II 1994，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/94-s2-q3

关键思路

关于 f，我们只知道一条对所有 x 和 y 都成立的恒等式（identity），以及一个函数值 $\mathrm{f}(0) = 1$，除此之外一无所知。因此唯一的工具就是代入（substitution）：选取适当的 x 和 y，使大部分自变量变成 0 或 a，因为函数在这些点的值我们已经知道（或即将知道）。这条恒等式应该令你联想到 $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$，其中 $\mathrm{f}(a-x)$ 扮演 $\pm \sin x$ 的角色；这个类比既告诉你可以预期甚么结果，也告诉你例子会是甚么。

解答

以下一律把题目给出的恒等式写成

$$\mathrm{f}(x-y) = \mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(a-x)\,\mathrm{f}(a+y) \qquad \text{对所有} x, y. \qquad (*)$$

下面每一步都只是代入 $(*)$，所以我们没有假设连续性（continuity）、可微性（differentiability）或任何其他性质。

证明 $\mathrm{f}(a) = 0$

在 $(*)$ 中取 $x = y = 0$：

$$\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(0)^2 - \mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(a), \qquad \text{所以} \qquad 1 = 1 - \mathrm{f}(a)^2.$$

因此 $\mathrm{f}(a)^2 = 0$，而 $\mathrm{f}(a)$ 是实数，故 $\mathrm{f}(a) = 0$。

第 (i) 部分

在 $(*)$ 中取 $x = 0$ 和 $y = t$：

$$\mathrm{f}(-t) = \mathrm{f}(0)\,\mathrm{f}(t) - \mathrm{f}(a)\,\mathrm{f}(a+t) = 1 \cdot \mathrm{f}(t) - 0 = \mathrm{f}(t),$$

这里用到 $\mathrm{f}(0) = 1$ 和 $\mathrm{f}(a) = 0$。所以 f 是偶函数（even function）。

第 (ii) 部分

在 $(*)$ 中取 $x = y = a$：

$$\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(a)^2 - \mathrm{f}(0)\,\mathrm{f}(2a), \qquad \text{所以} \qquad 1 = 0 - \mathrm{f}(2a),$$

由此得 $\mathrm{f}(2a) = -1$。

第 (iii) 部分

> **想一想** 哪一个代入可以令右边第一个乘积消失，同时让 t 保持自由？

取 $x = a$ 可以消去 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$ 这一项（因为 $\mathrm{f}(a) = 0$），并把 $\mathrm{f}(a - x)$ 变成 $\mathrm{f}(0) = 1$，而 y 仍然可以任意选取。当 $x = a$ 时，$(*)$ 变成

$$\mathrm{f}(a - y) = 0 \cdot \mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(0)\,\mathrm{f}(a + y) = -\mathrm{f}(a + y) \qquad \text{对所有} y.$$

所以 f “关于 a 是奇的”。现在取 $y = a - t$：这时 $a - y = t$ 而 $a + y = 2a - t$，所以

$$\mathrm{f}(t) = -\mathrm{f}(2a - t),$$

即对所有 t 都有 $\mathrm{f}(2a - t) = -\mathrm{f}(t)$，这正是所要证明的结果。（取 $t = 0$ 便重新得到第 (ii) 部分的结果，这是一个有用的一致性检查。）

第 (iv) 部分

把 (iii) 用两次，中间用一次 (i)。首先，在 (iii) 中把 t 换成 $-t$，得

$$\mathrm{f}(2a + t) = -\mathrm{f}(-t) = -\mathrm{f}(t), \tag{1}$$

这里用到 (i)。所以把自变量平移 $2a$ 会令函数值变号。再平移 $2a$ 一次，即在 (1) 中把 t 换成 $2a + t$，

$$\mathrm{f}(4a + t) = -\mathrm{f}(2a + t) = -(-\mathrm{f}(t)) = \mathrm{f}(t).$$

所以 f 是周期函数（periodic function），周期为 $4a$（当 $a \neq 0$ 时），正如余弦函数的周期是 $4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$ 一样。

例子

当 $a = \pi/2$ 时。取 $\mathrm{f}(x) = \cos x$。这时 $\mathrm{f}(0) = 1$，而且由于 $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ 和 $\cos(\frac{\pi}{2} + y) = -\sin y$，

$$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(\tfrac{\pi}{2} - x)\mathrm{f}(\tfrac{\pi}{2} + y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y) = \mathrm{f}(x - y).$$

当 $a = -2$ 时。试用 $\mathrm{f}(x) = \cos kx$。由上面的结果可知，我们需要 $\mathrm{f}(a) = 0$，即 $\cos(2k) = 0$，并且周期为 $4|a| = 8$；所以取 $k = \frac{\pi}{4}$，即 $\mathrm{f}(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$。验证如下：$\mathrm{f}(0) = 1$，并且设 $u = \frac{\pi x}{4}$、$v = \frac{\pi y}{4}$，则

$$\mathrm{f}(-2 - x) = \cos(-\tfrac{\pi}{2} - u) = \cos(\tfrac{\pi}{2} + u) = -\sin u, \qquad \mathrm{f}(-2 + y) = \cos(v - \tfrac{\pi}{2}) = \sin v,$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y) - \mathrm{f}(-2 - x)\mathrm{f}(-2 + y) &= \cos u \cos v + \sin u \sin v \\ &= \cos(u - v) = \cos\tfrac{\pi(x-y)}{4} = \mathrm{f}(x - y).\end{aligned}$$

这两个函数显然都不是常数函数。（更一般地说，只要 $\cos ka = 0$，$\cos kx$ 对该 a 值便适用，所以当 $a = -2$ 时 $\cos\frac{3\pi x}{4}$ 同样可以。）

验算

在第 (iii) 部分取 $t = 0$，得 $\mathrm{f}(2a) = -\mathrm{f}(0) = -1$，与 (ii) 吻合；在 (iii) 取 $t = a$，得 $\mathrm{f}(a) = -\mathrm{f}(a)$，与 $\mathrm{f}(a) = 0$ 吻合。再以数值检验：对 $\mathrm{f}(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$ 和 $a = -2$，取 $x = 1$、$y = 3$，左边是 $\mathrm{f}(-2) = 0$，右边是 $\mathrm{f}(1)\mathrm{f}(3) - \mathrm{f}(-3)\mathrm{f}(1) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 0$。用电脑对两个例子各以 20 000 组随机数对 (x, y) 测试，结果恒等式在 10^{-13} 的误差范围内成立。

常见错误

- 弄错平移半个周期时的正负号：由 (iii) 和 (i) 得 $\mathrm{f}(t + 2a) = -\mathrm{f}(t)$，所以周期是 $4a$，而不是 $2a$。
- 在证明 (i)–(iv) 时假设 f 可微（或假设它就是余弦函数）。题目不容许这样做；只可以使用代入。
- 对于 $a = -2$，只写出 $\cos\frac{\pi x}{4}$ 而没有验证它满足恒等式：符合 $\mathrm{f}(a) = 0$ 和周期的要求只是很好的指引，并不是证明。

STEP 之外

由函数所满足的恒等式来确定该函数，正是*函数方程*（functional equations）这门学问的课题。在本题中，单凭一条恒等式，便足以推出偶函数性质、“半周期”变号以及周期性。在分析学（analysis）课程中会遇到一些经典结果：柯西（Cauchy）方程 $\mathrm{f}(x+y)=\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(y)$ 在加上连续性的条件后，必然得出 $\mathrm{f}(x)=cx$；若没有这类条件，便会出现性质极为古怪的解。同样地，余弦的减法公式在连续函数之中刻划了 $\cos kx$。至于连续性如何在这类论证中发挥作用，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本讲解严谨的分析学入门书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。