详细解答

STEP II 1994，第 2 题

纯数学 · 勒让德多项式

STEP II 1994，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/94-s2-q2

关键思路

每次求导，因式 $(x-a)^m$ 都会保留下来，只是次数减一，所以 m 重的重根（repeated root）同时也是首 $m-1$ 阶导数（derivative）的根。多项式 $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$ 在 $[-1,1]$ 的两个端点都有 n 重根，因此对 $x^m\mathrm{P}_n(x)$ 作分部积分（integration by parts）时，每一个边界项都会消失。每作一次分部积分，就有一阶导数从 $(x^2-1)^n$ 转移到 x^m 上，而 x^m 会比 $(x^2-1)^n$ 更早把导数用尽。

解答

重根与导数

由积法则（product rule），

$$\begin{aligned}\mathrm{P}'(x) &= m(x-a)^{m-1}\mathrm{Q}(x) + (x-a)^m\mathrm{Q}'(x)\\ &= (x-a)^{m-1}[m\mathrm{Q}(x) + (x-a)\mathrm{Q}'(x)] = (x-a)^{m-1}\mathrm{R}(x),\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{R}(x) = m\mathrm{Q}(x) + (x-a)\mathrm{Q}'(x)$ 是多项式，因为多项式的和与积仍是多项式。这正是所要求的形式。

这个结果说明：若多项式含有因式 $(x-a)^k$（$k \geq 1$），则它的导数含有因式 $(x-a)^{k-1}$。由 $k = m$ 开始反复应用这个结果，可得

$$\mathrm{P}^{(r)}(x) = (x-a)^{m-r}\mathrm{R}_r(x) \qquad (0 \leq r \leq m)$$

其中 R_r 为某些多项式。每一步都是容许的，因为我们只在 $r \leq m-1$ 时才对 $\mathrm{P}^{(r)}$ 求导以得出 $\mathrm{P}^{(r+1)}$，而此时指数 $m-r$ 至少为 1。若 $1 \leq r \leq m-1$，则 $m-r \geq 1$，所以 $(x-a)$ 仍是 $\mathrm{P}^{(r)}(x)$ 的因式，因此 $\mathrm{P}^{(r)}(a) = 0$。（这对 $r = 0$ 同样成立，但对 $r = m$ 一般不成立。）

P_n 是 n 次多项式

设 $\mathrm{F}(x) = (x^2-1)^n$。由二项式定理（binomial theorem），$\mathrm{F}(x)$ 等于 x^{2n} 加上次数不超过 $2n-2$ 的各项。把 x^k 求导 n 次，结果或是 0（若 $k < n$），或是 x^{k-n} 的倍数，所以 $\mathrm{P}_n = \mathrm{F}^{(n)}$ 是次数不超过 n 的多项式。它的 x^n 项只来自 x^{2n}：

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} x^{2n} = 2n(2n-1)\cdots(n+1)\,x^n = \frac{(2n)!}{n!}\,x^n.$$

这个系数不等于零，所以 P_n 的次数恰好是 n。

等于零的积分

由于 $\mathrm{F}(x) = (x-1)^n(x+1)^n$，在第一部分取 $a=1$、$m=n$ 及 $\mathrm{Q}(x) = (x+1)^n$，可知当 $1 \le r \le n-1$ 时 $\mathrm{F}^{(r)}(1) = 0$。取 $a=-1$ 作同样的论证，可得 $\mathrm{F}^{(r)}(-1) = 0$。另外，直接可见 $\mathrm{F}(\pm 1) = 0$。所以

$$\mathrm{F}^{(r)}(\pm 1) = 0 \qquad \text{对于} 0 \le r \le n-1. \tag{$*$}$$

现在取 $j \ge 1$ 及 $1 \le k \le n$。作分部积分，对 x^j 求导、对 $\mathrm{F}^{(k)}$ 积分，可得

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^j \mathrm{F}^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[x^j \mathrm{F}^{(k-1)}(x)\Big]_{-1}^{1} - j\int_{-1}^{1} x^{j-1}\mathrm{F}^{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -j\int_{-1}^{1} x^{j-1}\mathrm{F}^{(k-1)}(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

因为 $k-1 \le n-1$，所以由 $(*)$ 可知边界项等于零。

> **想一想** 这个步骤可以用多少次，才会出问题?

每用一次，x 的幂次减一，导数的阶数也减一。我们由 x^m 和 $\mathrm{F}^{(n)}$ 开始，所以可以应用 m 次。这个步骤需要 $k \ge 1$，而我们用到的最小的 k 是 $n-m+1 \ge 1$。经过 m 步之后，

$$\int_{-1}^{1} x^m \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^m m! \int_{-1}^{1} \mathrm{F}^{(n-m)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

（当 $m=0$ 时，这就是原来的积分。）

若 $0 \le m \le n-1$，则 $n-m \ge 1$，所以最后的被积函数（integrand）本身是一个导数，于是

$$\int_{-1}^{1} x^m \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^m m!\Big[\mathrm{F}^{(n-m-1)}(x)\Big]_{-1}^{1} = 0,$$

这是由 $(*)$ 得出的，因为 $0 \le n-m-1 \le n-1$。这就是所要求的结果。

$m = n$ 的情况

取 $m = n$ 时，同样的化简过程仍然有效（最后一步用到 $k = 1$），并给出

$$\int_{-1}^{1} x^n \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n n! \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n\,\mathrm{d}x = n! \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x,$$

因为 $(x^2-1)^n = (-1)^n(1-x^2)^n$。被积函数是偶函数（even function），而代换 $x = \sin t$、$\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$ 把 $[0,1]$ 变为 $[0, \frac{\pi}{2}]$，且 $1 - x^2 = \cos^2 t$。所以，利用提示中的公式，

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

因此

$$\boxed{\int_{-1}^{1} x^n \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2^{2n+1}(n!)^3}{(2n+1)!}.}$$

验算

当 $n = 1$ 时，$\mathrm{P}_1(x) = 2x$，所以 $\int_{-1}^{1} x \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$，而公式给出 $\frac{8\cdot 1}{6} = \frac{4}{3}$。当 $n = 2$ 时，$\mathrm{P}_2(x) = 12x^2 - 4$。于是 $\int_{-1}^{1}(12x^2-4)\,\mathrm{d}x = 8 - 8 = 0$，且 $\int_{-1}^{1} x(12x^2-4)\,\mathrm{d}x = 0$（被积函数是奇函数），与预期相符。另外 $\int_{-1}^{1} x^2(12x^2-4)\,\mathrm{d}x = \frac{24}{5} - \frac{8}{3} = \frac{32}{15}$，与 $\frac{2^5\cdot 8}{120} = \frac{32}{15}$ 吻合。我们已用电脑对 $n \le 10$ 的所有情况作了精确验证。

常见错误

- 忘记边界项除了需要 $1 \le r \le n-1$ 时 $\mathrm{F}^{(r)}(\pm 1) = 0$ 之外，还需要 $r = 0$ 时也成立。$m = n - 1$ 的最后一步正是用到 $r = 0$。
- 弄错正负号：$(x^2-1)^n = (-1)^n(1-x^2)^n$ 抵销了分部积分所产生的 $(-1)^n$，所以答案是正数。这是合理的，因为 $x^n\mathrm{P}_n(x)$ 的首项系数是正数。

STEP 之外

除了相差一个常数倍之外，P_n 就是 n 次勒让德多项式（Legendre polynomial），而它的这个公式称为罗德里格斯公式（Rodrigues' formula）。第一个结果说明，就内积（inner product）$\int_{-1}^{1} fg\,\mathrm{d}x$ 而言，P_n 与每一个次数较低的多项式都正交（orthogonal）。勒让德级数（Legendre series）和高斯求积法（Gaussian quadrature）背后所依靠的正是这个性质。在球坐标（spherical coordinates）下求解拉普拉斯方程（Laplace's equation）时，勒让德多项式也会出现。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教材）通过勒让德微分方程（Legendre's differential equation）引入这些多项式。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。