详细解答

STEP II 1994，第 14 题

概率与统计 · 几何概率

STEP II 1994，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/94-s2-q14

关键思路

“在圆盘上均匀分布（uniform）”的意思是概率与面积成正比。因此，落点与圆心的距离不超过 r 的概率，就是较小圆盘的面积除以镖靶的面积，由此立刻得到 R 的分布函数（distribution function）。第 (ii) 部分于是化为三件事：每次投掷的单一概率 p、一个几何分布式的“至少成功一次”计算，以及求一个整数变量函数的最小值。最后一项我们不用微积分，而是考察相邻两项之差。

解答

第 (i) 部分

把每枝飞镖的落点看成在半径为 a 的圆盘上均匀分布的一点，于是飞镖落在镖靶上任何区域的概率，就是该区域的面积除以 πa^2。

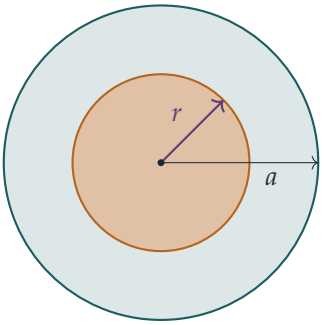
对于 $0 \le r \le a$，事件 $R \le r$ 表示飞镖落在半径为 r 的同心圆盘内，所以

$$\mathrm{P}(R \le r) = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2}.$$

求导可得 R 的概率密度函数（probability density function）为

$$f(r) = \frac{2r}{a^2} \qquad (0 \le r \le a),$$

而在其他情况下 $f(r) = 0$。



注意 R 在 $[0,a]$ 上并非均匀分布：半径越大，面积越多（薄圆环越长），这就是密度随 r 线性增长的原因。

现在

$$\mathrm{E}(R) = \int_0^a r \cdot \frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{2a}{3},$$
$$\mathrm{E}(R^2) = \int_0^a r^2 \cdot \frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{a^2}\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{a^2}{2},$$

所以

$$\mathrm{Var}(R) = \mathrm{E}(R^2) - (\mathrm{E}(R))^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{4a^2}{9} = \frac{a^2}{18},$$

这正是所要证明的方差（variance）。

第 (ii) 部分

（我们把题目中的“with $a/\sqrt{10}$”理解为“within $a/\sqrt{10}$”。）由第 (i) 部分，单次投掷落在距圆心 $a/\sqrt{10}$ 以内的概率为

$$p = \frac{(a/\sqrt{10})^2}{a^2} = \frac{1}{10}.$$

我们假设各次投掷互相独立（independent）（每次都是镖靶上一个全新的均匀随机点）。那么 m 次投掷中没有一次落在 $a/\sqrt{10}$ 以内的概率为 $(0.9)^m$，所以

$$\mathrm{P}(\text{他赢回£12}) = 1 - (0.9)^m.$$

他的损失是所付的 $£(12+m)$ 减去赢回的金额，所以他的期望损失（expected loss，以英镑计）为

$$L(m) = 12 + m - 12(1-(0.9)^m) = m + 12(0.9)^m.$$

每多投一次，肯定要多付 £1，但赢得 £12 的机会也随之增加；我们需要找出两者在何处取得平衡。

想一想 一个只在整数上有定义的函数，怎样求它的最小值?

比较相邻的值。对于 $m \geq 1$,

$$L(m+1) - L(m) = 1 + 12(0.9)^m(0.9-1) = 1 - 1.2\,(0.9)^m.$$

由于 $(0.9)^m$ 随 m 增大而减小，这个差随 m 递增，所以当差为负时 L 递减，一旦差变为正便递增。差为负当且仅当 $(0.9)^m > \frac{1}{1.2} = \frac{5}{6}$。现在

$$(0.9)^1 = 0.9 > \tfrac{5}{6}, \qquad (0.9)^2 = 0.81 < \tfrac{5}{6},$$

所以 $L(2) - L(1) < 0$，而对每个 $m \geq 2$ 都有 $L(m+1) - L(m) > 0$。因此

$$L(1) > L(2) < L(3) < L(4) < \cdots,$$

而事实上 $L(1) = 11.80$，$L(2) = 11.72$，$L(3) = 11.748$。(他决意要玩，所以不容许 $m = 0$; 无论如何 $L(0) = 12$ 也较大。)

他应选择投 $m = 2$ 次，期望损失为 £11.72。由于这个最小值是严格的，$m = 2$ 是唯一符合要求的值。

验算

- 在单位圆盘内模拟 4×10^5 个均匀分布的点，得出平均值 0.667、平方的平均值 0.500 及方差 $0.0556 \approx \frac{1}{18}$，与 $\frac{2}{3}$、$\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{18}$ 吻合；约有 10% 的点落在距圆心 $1/\sqrt{10}$ 以内。
- 准确值为 $L(1) = \frac{59}{5}$，$L(2) = \frac{293}{25}$，$L(3) = \frac{2937}{250}$，而在 $1 \leq m \leq 99$ 范围内逐一搜索，亦确认 $m = 2$ 为最小值所在。
- 合理性检查：方差 $a^2/18$ 远小于 $[0, a]$ 上均匀分布变量的方差 $a^2/12$，因为 R 集中在靠近边缘的位置。

常见错误

- 把 R 当作在 $[0, a]$ 上均匀分布，这样会得出方差 $a^2/12$。
- 忘记固定的 £12 只是成本的一部分：损失是 $12 + m$ 减去期望赢得的金额，而不只是 m。
- 令 $m + 12(0.9)^m$ 的导数等于零会得出 $m \approx 2.3$，这并不是答案；你必须比较它两侧的整数值。

STEP 之外

由平面上一个均匀分布的点求 R 的分布，是把联合密度（joint density）变换到极坐标（polar coordinates）的最简单例子，其中 $\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ 里的雅可比（Jacobian）因子 r，正是令 R 的密度与 r 成正比的原因。联合密度的变量代换，以及在离散选择上求最优，都是大学一年级概率课程的标准课题。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率入门教材）涵盖了这两个课题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。