详细解答

STEP II 1994，第 12 题

概率与统计 · 条件概率

STEP II 1994，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/94-s2-q12

关键思路

第一次掷骰一旦定出“目标点数”(point)s,其后每一次掷骰都是同一个独立(independent)试验，只有三种结果：掷出 s（胜）、掷出 7（负），或掷出其他点数（继续）。因此，在给定目标点数的条件下，游戏结束于第几次掷骰服从几何分布（geometric distribution），而整道题目就是按目标点数分情况讨论，再用全概率公式（law of total probability）加起来。最后一部分是同样的计算，只是换了另一个作为条件的事件。

解答

设 S 为两颗公平骰子的点数和。数算 36 个等可能的结果，可得

$$\mathrm{P}(S=s)=\frac{6-|s-7|}{36},\qquad s=2,3,\ldots,12,$$

所以点数和 $2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$ 的概率为 $\frac{1}{36}\times(1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1)$。

第一次掷骰即获胜

若第一次的点数和是 7 或 11，她立即获胜：

$$\mathrm{P}(\text{获胜掷次为1})=\frac{6}{36}+\frac{2}{36}=\frac{2}{9}.$$

已知掷骰多于一次，在第 n 次掷骰获胜

她掷骰多于一次，当且仅当第一次的点数和是目标点数 $4,5,6,8,9,10$ 其中之一，其概率为

$$\mathrm{P}(M)=\frac{3+4+5+5+4+3}{36}=\frac{2}{3},$$

其中 M 是事件“她掷骰多于一次”。

固定一个目标点数 s，并记 $p_s = \mathrm{P}(S = s)$。其后每一次掷骰都与之前的掷骰独立，而在该次掷骰中，

$$\mathrm{P}(\text{点数和为}s) = p_s, \qquad \mathrm{P}(\text{点数和为}7) = \tfrac{1}{6}, \qquad \mathrm{P}(\text{两者皆非}) = r_s = 1 - p_s - \tfrac{1}{6}.$$

（由于 $s \neq 7$，这两个事件互斥（disjoint）。）她在第 $n \geq 2$ 次掷骰获胜，当且仅当第 $2, \ldots, n-1$ 次掷骰全是“两者皆非”，而第 n 次掷出 s。所以，由独立性，

$$\mathrm{P}(\text{获胜掷次为}n \mid \text{目标点数为}s) = r_s^{n-2}\, p_s.$$

目标点数可以配成概率相等的三对（4 与 10、5 与 9、6 与 8）。记 $p_s = k/36$，其中 $k = 3, 4, 5$；则 $r_s = (30-k)/36$，分别为 $\frac{3}{4}$、$\frac{13}{18}$、$\frac{25}{36}$。由全概率公式，对于 $n \geq 2$，

$$\mathrm{P}(\text{获胜掷次为}n) = \sum_s p_s \cdot r_s^{n-2} p_s = 2\sum_{k=3}^{5} \left(\frac{k}{36}\right)^2 \left(\frac{30-k}{36}\right)^{n-2}.$$

在第 $n \geq 2$ 次掷骰获胜必然意味着 M 发生，所以除以 $\mathrm{P}(M) = \frac{2}{3}$ 就相当于把每个系数乘以 $\frac{3}{2}$：

$$2 \cdot \frac{k^2}{1296} \cdot \frac{3}{2} = \frac{k^2}{432} \quad \text{得出} \quad \frac{9}{432} = \frac{1}{48}, \quad \frac{16}{432} = \frac{1}{27}, \quad \frac{25}{432}.$$

因此

$$\mathrm{P}(\text{获胜掷次为}n \mid M) = \frac{1}{48}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} + \frac{1}{27}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-2} + \frac{25}{432}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-2},$$

这正是所要求的结果。

想一想 为甚么不可以只用一个“平均”目标点数和单一个几何分布来计算?

因为继续下去的概率 r_s 取决于目标点数。三个几何分布的混合（mixture）本身并不是几何分布，所以答案中有三个不同的幂，而不是只有一个。

已知掷骰多于 m 次

设 M_m 为事件“她掷骰多于 m 次”，其中 $m > 1$。这个事件发生，当且仅当第一次掷骰定出目标点数 s，而第 $2, \ldots, m$ 次掷骰全是“两者皆非”，所以

$$\mathrm{P}(M_m) = \sum_s p_s\, r_s^{m-1} = \frac{2}{36}\sum_{k=3}^{5} k\left(\frac{30-k}{36}\right)^{m-1}.$$

若 $n \leq m$,在第 n 次掷骰获胜与 M_m 不能同时发生,所以条件概率(conditional probability)为 0。若 $n > m$，在第 n 次掷骰获胜必然意味着 M_m 发生，所以

$$\mathrm{P}(\text{获胜掷次为}n \mid M_m) = \frac{\mathrm{P}(\text{获胜掷次为}n)}{\mathrm{P}(M_m)} = \frac{9(\frac{3}{4})^{n-2} + 16(\frac{13}{18})^{n-2} + 25(\frac{25}{36})^{n-2}}{36\left[3(\frac{3}{4})^{m-1} + 4(\frac{13}{18})^{m-1} + 5(\frac{25}{36})^{m-1}\right]},$$

其中因子 $\frac{2}{1296}$ 和 $\frac{2}{36}$ 已经约去。等价地，把分子和分母同乘以 $\frac{1}{432}$，得

$$\frac{\frac{1}{48}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}+\frac{1}{27}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-2}+\frac{25}{432}\left(\frac{25}{36}\right)^{n-2}}{\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{m-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{13}{18}\right)^{m-1}+\frac{5}{12}\left(\frac{25}{36}\right)^{m-1}}, \qquad n>m.$$

留意分母正是 $\mathrm{P}(M_m \mid M)$,这是理所当然的:分子是先前以 M 为条件的答案,而 $M_m \subseteq M$。

验算

- 取 $m=1$ 时，分母变成 $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{5}{12}=1$，还原为上一部分的结果。
- 当 $n=2$ 时，条件概率公式给出 $\frac{1}{48}+\frac{1}{27}+\frac{25}{432}=\frac{50}{432}=\frac{25}{216}\approx 0.1157$；直接计算，$\frac{3}{2}\cdot\frac{2(9+16+25)}{1296}$ 给出相同的值。
- 当 $m=2$、$n=3$ 时，答案是 $\frac{107}{930}\approx 0.1151$。我们用分数把游戏逐步精确推演，核对了所有公式；另外模拟了 4×10^5 局游戏，结果在抽样误差范围内吻合。

常见错误

- 忘记除以 $\mathrm{P}(M)=\frac{2}{3}$，结果得到系数 $\frac{1}{72}$、$\frac{2}{81}$、$\frac{25}{648}$。
- 以单一个公比写成 $\mathrm{P}(M_m)=\left(\text{某数}\right)^{m-1}$：作为条件的事件同样是对各个目标点数的混合。
- 把“两者皆非”的掷骰次数算成 $n-1$ 而不是 $n-2$：第 1 次掷骰用来定出目标点数，第 n 次掷骰则是获胜的一掷。

STEP 之外

这个游戏是一条小型的马可夫链（Markov chain），有“胜”和“负”两个吸收态（absorbing states），而这里的吸收时间是几何分布的混合。以掷过 m 次仍未结束为条件，会令混合的权重移向维持得最久的目标点数（这里是 4 和 10，即最难再次掷出的点数）；这是一个简单的例子，说明无记忆（memoryless）分布的混合本身并不具有无记忆性。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（概率论入门）以这个程度讲解条件概率和马可夫链。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。