详细解答

STEP II 1994，第 11 题

力学 · 抛体与爆炸

STEP II 1994，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/94-s2-q11

关键思路

爆炸发生在一个已知的高度，即垂直飞行的最高点，而那一刻炮弹是静止的。因此两块碎片由同一点出发，速度大小相等、方向相反。若用一个角 θ 来描述方向，每块碎片的落地时间都可由一条二次方程（quadratic equation）求得，而两个落地点之间的距离就成为 θ 的单一函数。之所以出现两种情况，是因为该函数的最大值要么位于容许范围的端点，要么位于范围内部的转向点（turning point）。

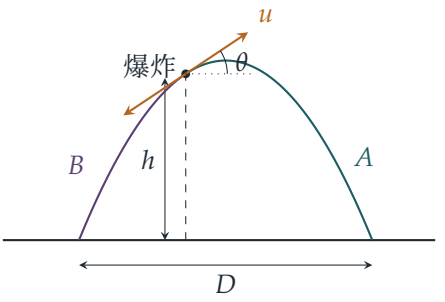
解答

建立模型

我们把炮弹和碎片都视为只受重力作用的质点（particle）。炮弹以初速 v 上升，所以它在以下高度静止：

$$h = \frac{v^2}{2g}, \qquad \text{即} \qquad 2gh = v^2.$$

把刚爆炸后的两块碎片称为 A 和 B。它们的速度大小相等、方向相反，所以两者都在通过爆炸点的同一个垂直平面内。在该平面内取 x 轴为水平方向，y 轴垂直向上，爆炸点位于 $(0, h)$。我们可以适当地命名碎片，使 A 不向下运动。于是 A 的速度为 $(u\cos\theta,\ u\sin\theta)$，$B$ 的速度为 $(-u\cos\theta,\ -u\sin\theta)$，其中 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$。记 $s = \sin\theta$ 及 $c = \cos\theta$，故 $c \ge 0$。



落地时间

爆炸后的时间 t，碎片 A 的高度为 $h + ust - \frac{1}{2}gt^2$。它落地时

$$\tfrac{1}{2}gt^2 - us\,t - h = 0.$$

两根之积为 $-2h/g < 0$，所以恰好有一个正根：

$$t_A = \frac{us + \sqrt{u^2s^2 + 2gh}}{g} = \frac{us + \sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

对于 B，垂直速度为 $-us$，所以我们把 s 换成 $-s$：

$$t_B = \frac{-us + \sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

这个值是正数，因为 $\sqrt{u^2s^2 + v^2} > us$。

落地点之间的距离

在水平方向上，A 沿 x 轴正方向移动了 $uc\,t_A$，B 沿负方向移动了 $uc\,t_B$，所以它们落在发射点的两侧。因此两个落地点之间的距离为

$$D = uc\,(t_A + t_B) = \frac{2uc\sqrt{u^2s^2 + v^2}}{g}.$$

由于 $D \geq 0$，求 D 的最大值等同于求 D^2 的最大值。设 $x = s^2 \in [0,1]$，则 $c^2 = 1 - x$。于是

$$\frac{g^2D^2}{4u^2} = (1-x)(v^2 + u^2x) = f(x), \qquad \text{记作此式,}$$

并且

$$f(x) = v^2 + (u^2 - v^2)x - u^2x^2.$$

这是 x 的二次函数，首项系数为负，其顶点（vertex）位于

$$x^* = \frac{u^2 - v^2}{2u^2}.$$

想一想 f 的顶点是最大值点，那么为甚么答案不总是 $f(x^*)$?

只有 $x \in [0,1]$ 才是容许的，因为 $x = \sin^2\theta$。留意 $x^* < \frac{1}{2}$ 恒成立，所以顶点永远不会超出上端。顶点是否在容许范围内，只取决于它的正负。

情况 $u \le v$。此时 $x^* \le 0$。在 $[0,1]$ 上，我们位于一条开口向下的抛物线（parabola）的顶点右方，所以 f 在该区间上递减，最大值在 $x = 0$ 处取得，而 $f(0) = v^2$。这对应 $\theta = 0$，即水平方向的爆炸。因此

$$D_{\max} = \frac{2u}{g}\sqrt{v^2} = \frac{2uv}{g}.$$

情况 $v \le u$。此时 $0 \le x^* < \frac{1}{2}$，所以顶点在容许范围内，并给出最大值：

$$\begin{aligned} f(x^*) &= v^2 + \frac{(u^2-v^2)^2}{2u^2} - \frac{(u^2-v^2)^2}{4u^2} = v^2 + \frac{(u^2-v^2)^2}{4u^2} \\ &= \frac{4u^2v^2 + u^4 - 2u^2v^2 + v^4}{4u^2} = \frac{(u^2+v^2)^2}{4u^2}. \end{aligned}$$

所以

$$D_{\max} = \frac{2u}{g}\cdot\frac{u^2+v^2}{2u} = \frac{u^2+v^2}{g}.$$

这在 $\sin^2\theta = \dfrac{u^2-v^2}{2u^2}$ 时发生，所以碎片是与水平方向成一个角度飞出的。

当 $u = v$ 时，两条公式都给出 $2u^2/g$，所以两个答案在两种情况的分界处一致，这是必然的。证明至此完成。

验算

- 单位：uv/g 和 $(u^2+v^2)/g$ 都是（速率）^{2}/（加速度），即长度。
- 取 $g = 9.8$、$u = 30$ 及 $v = 10$，最佳角度为 $\theta \approx 41.8°$，而由 D 的一般公式和 $(u^2+v^2)/g$ 都得出 $D = 1000/9.8 \approx 102.04\,\text{m}$。水平方向的爆炸只给出 $2\cdot 30\cdot 10/9.8 \approx 61.2\,\text{m}$。
- 以数值方法逐步计算两条轨迹，并在细密的网格上扫描 θ，对数百组随机的 (u,v) 都能重现这两个最大值。
- 当 $v = 0$ 时，炮弹在地面爆炸，答案变成 u^2/g。这正是以速率 u、仰角 $45°$ 发射的抛体（projectile）通常的最大射程，理应如此：B 立即撞入地面，而 $x^* = \frac{1}{2}$ 给出 $\theta = 45°$。

常见错误

- 假设最佳的爆炸方向是水平的。这只在 $u \le v$ 时才成立。

- 对两块碎片使用相同的飞行时间。向上抛出的那一块在空中停留得较久。
- 求最大值时忘记了约束条件 $0 \leq \sin^2\theta \leq 1$，因而漏掉了分情况讨论。

STEP 之外

这个简洁的答案有一个漂亮的解释。质心（centre of mass）只是笔直下坠，而相对于质心，两块碎片以相对速率 $2u$ 沿一条直线互相远离。但它们在不同的时间着地，所以问题就变成在约束条件下求最优值，而最大值会随着参数的变化由边界转移到内部。这种转换会在大学一年级最优化（optimisation）课程的拉格朗日乘数（Lagrange multiplier）和 Karush–Kuhn–Tucker 条件中再次出现。关于动量守恒（conservation of momentum）、质心参考系和更深入的抛体问题，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。