详细解答

STEP II 1994，第 10 题

力学 · 弹性绳与简谐运动

STEP II 1994，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/94-s2-q10

关键思路

着眼于绳子的伸长量（extension），而不是拖卡的位置。由于货车的速度恒定，伸长量所满足的方程与拖卡加速度的方程完全相同，只差一个正负号，而这个方程正是简谐运动（simple harmonic motion）。因此绳子会在半个振动周期内保持拉紧，然后放开拖卡，而此时拖卡已比货车走得更快。之后便只是一道普通的匀速追及问题。

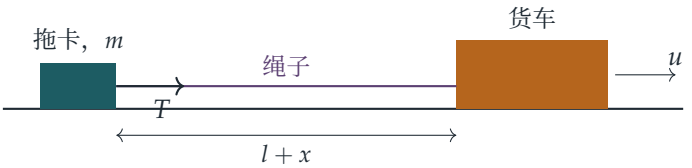
解答

建立模型

把拖卡视为质点（particle），把绳子视为轻绳，拉紧时服从胡克定律（Hooke's law），松弛时不施任何力，并忽略摩擦。由绳子首次拉紧的一刻起计时间 t，距离则沿运动方向量度。在 $t = 0$ 时，货车以速率 u 行驶（并一直保持这个速率），拖卡静止，而货车在拖卡前方距离 l 处。

设拖卡位于 $y(t)$，其中 $y(0) = 0$，则货车位于 $l + ut$。绳子的伸长量为

$$x = (l + ut) - y - l = ut - y.$$



绳子拉紧期间

当 $x > 0$ 时，张力（tension）为 $T = \lambda x/l$，它是拖卡所受的唯一水平力，把拖卡向前拉。所以

$$m\ddot{y} = \frac{\lambda x}{l}.$$

由于 $x = ut - y$ 而 u 为常数，$\ddot{x} = -\ddot{y}$，因此

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \text{其中} \omega^2 = \frac{\lambda}{ml}.$$

这就是简谐运动。初始条件（initial conditions）为 $x(0) = 0$（绳子刚刚拉紧）和 $\dot{x}(0) = u - \dot{y}(0) = u$，所以

$$x = \frac{u}{\omega}\sin\omega t, \qquad \dot{x} = u\cos\omega t.$$

拖卡的速度为 $\dot{y} = u - \dot{x} = u(1 - \cos\omega t)$。

> **想一想** 按照简谐运动的公式，过了一段时间后 x 会变成负数。那时公式还成立吗？

不成立。方程 $\ddot{x} = -\omega^2 x$ 用到张力 $\lambda x/l$，而这只在 $x > 0$ 时适用；绳子不能推东西。公式在 $0 \le t \le \pi/\omega$ 内成立，此时 $\sin\omega t \ge 0$，而绳子再次松弛的时刻为

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \pi\left(\frac{lm}{\lambda}\right)^{1/2}.$$

在那一刻伸长量为零，所以拖卡又一次落后货车距离 l，而它的速度为

$$\dot{y}(t_1) = u(1 - \cos\pi) = 2u.$$

绳子松弛之后

当 $t > t_1$ 时，拖卡以 $2u$ 行驶，货车以 u 行驶，所以两者之间的距离（在 $t = t_1$ 时为 l）以稳定的速率 $2u - u = u$ 缩短。此后这段距离小于 l，所以绳子保持松弛，拖卡仍然不受任何水平力，它的速率确实维持在 $2u$。再过时间 l/u，这段距离便缩短至零。

因此，拖卡与货车相撞的时刻是绳子首次拉紧后的

$$t_1 + \frac{l}{u} = \pi\left(\frac{lm}{\lambda}\right)^{1/2} + \frac{l}{u}$$

正如题目所求。

验算

- 单位：λ 是一个力，所以 lm/λ 的单位是 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}/\mathrm{N} = \mathrm{s}^2$，两项都是时间。

- 转换参考系（frame）：绳子的作用就像一条弹簧，令拖卡与一辆质量实际上无限大的货车作弹性碰撞（elastic collision）。在货车的参考系中，拖卡以 u 接近，再以 u 沿相反方向离开，所以它最后相对地面的速率是 $2u$，与上面的结果一致。
- 对拖卡的运动方程作数值积分（numerical integration）（绳子松弛时把力关掉），随机选取 m、l、λ、u 的值，结果与公式吻合；例如选取 m, l, λ, u 使得 $\pi/\omega \approx 2.9944$ 及 $l/u \approx 2.3017$ 时，得出的碰撞时间为 5.2962，而公式的预测值为 5.2961。

常见错误

- 把简谐运动的解用于所有时间，忘记了伸长量回到零时绳子会松弛。
- 直接就拖卡的位置 y 写出运动方程，得到 $m\ddot{y} = \lambda(ut - y)/l$，这是一个受迫方程（forced equation）。它是可以解的，但代换 $x = ut - y$ 能立即把它化成非受迫方程。
- 漏掉最后的 l/u：绳子松弛时，拖卡仍然落后货车整整一个自然长度（natural length）。

STEP 之外

转到货车的参考系后，整个过程就变成拖卡与一条固定在不动墙上的弹簧之间的一次弹性“碰撞”：拖卡以速率 u 进来，以速率 u 离开，而不论速率是多少，接触的时间都恰好是半个周期。这是说明伽利略不变性（Galilean invariance）和能量守恒（energy conservation）如何约束碰撞的最简单例子；这个想法贯穿大学一年级的力学，并引向散射理论（scattering theory）。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）正是以这种精神处理振动和碰撞。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。