详细解答

STEP I 1994，第 9 题

力学 • 抛体运动

STEP I 1994，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/94-s1-q9

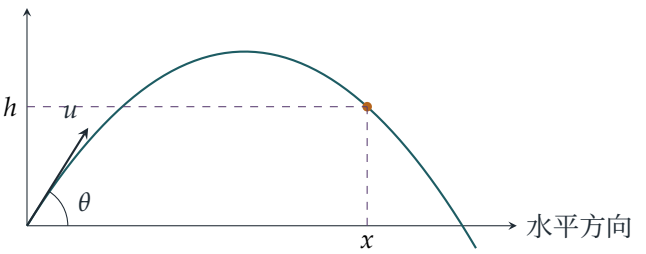
关键思路

发射角 θ 是未知的量，所以要把它消去：水平方向和垂直方向的方程分别含有 $u\cos\theta$ 或 $u\sin\theta$，把两式平方后相加，就可以完全消去 θ。这样得出的方程是 t^2 的二次方程（quadratic），而二次方程只有在判别式（discriminant）非负时才有实根（real roots）。这个条件正好就是射程的上界。

解答

关于 t 的方程

把炮弹看成只受重力作用的质点（particle），从原点以仰角 θ 发射。经过时间 t 后，它的水平距离为 x，高度为 h，所以它与大炮的距离是 $\sqrt{x^2+h^2}$，与题目所述相符。



利用向下的恒定加速度（constant acceleration）g，以及水平方向不受力，

$$x = ut\cos\theta,$$
$$h = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

把含 θ 的项分离出来：

$$ut\cos\theta = x, \qquad ut\sin\theta = h + \tfrac{1}{2}gt^2.$$

两式平方后相加，并利用 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，

$$\begin{aligned} u^2t^2 &= x^2 + (h + \tfrac{1}{2}gt^2)^2 \\ &= x^2 + h^2 + ght^2 + \tfrac{1}{4}g^2t^4, \end{aligned}$$

整理后得

$$\tfrac{1}{4}g^2t^4 - (u^2 - gh)t^2 + h^2 + x^2 = 0,$$

这正是所求。

射程的上界

现在固定 u 和 h，考虑在高度 h 处可以达到哪些水平距离 x。如果炮弹在某时刻 t 位于 (x, h)，那么 $T = t^2$ 就是以下方程的一个实根：

$$\tfrac{1}{4}g^2T^2 - (u^2 - gh)T + (h^2 + x^2) = 0.$$

> **想一想** 这条方程涉及 x、h、u 和 t，但我们想要的是一个只关于 x 的结论。二次方程若有实根，必须满足甚么条件？

有实根就需要判别式非负：

$$\begin{aligned} (u^2 - gh)^2 - 4 \cdot \tfrac{1}{4}g^2(h^2 + x^2) &\geq 0 \\ u^4 - 2u^2gh + g^2h^2 - g^2h^2 - g^2x^2 &\geq 0 \\ g^2x^2 &\leq u^2(u^2 - 2gh). \end{aligned}$$

由于 $u^2 > 2gh$，右边为正数，两边取非负平方根得

$$x \leq \frac{u\sqrt{u^2 - 2gh}}{g}.$$

所以在高度 h 处的水平射程永远不会超过这个值，这正是我们要证明的。（如果 $u^2 < 2gh$，则不等式对任何 x 都不成立：高度 h 超过了炮弹所能达到的最大高度 $u^2/2g$。）

上界可以达到

等号成立表示判别式为零，所以方程有重根（double root）

$$t^2 = T = \frac{u^2 - gh}{2 \cdot \frac{1}{4}g^2} = \frac{2(u^2 - gh)}{g^2}.$$

这个值是正数（若 $h \geq 0$，因为 $u^2 > 2gh \geq gh$；若 $h < 0$，则显然成立），所以它确实给出一个时刻 $t > 0$。我们仍须检查，是否有某个角 θ 能在 $x = u\sqrt{u^2 - 2gh}/g$ 的情况下给出这个时刻。由两条分量方程，我们需要

$$\sin\theta = \frac{h + \frac{1}{2}gt^2}{ut}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{ut}.$$

代入上面 t^2 的值，$h + \frac{1}{2}gt^2 = h + (u^2 - gh)/g = u^2/g$，所以

$$\sin\theta = \frac{u}{gt}, \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{u^2 - 2gh}}{gt}.$$

想一想 我们分别为 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 选定了数值。怎样知道有同一个角同时取得这两个值?

两个值都是正数，而且根据 t^2 的值，

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{u^2 + u^2 - 2gh}{g^2t^2} = \frac{2(u^2 - gh)}{g^2t^2} = 1$$

。所以在 0 与 $\frac{1}{2}\pi$ 之间恰好有一个角 θ 符合要求，即

$$\tan\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 - 2gh}}.$$

以这个角度发射，炮弹在时刻 t 位于高度 h，水平距离恰好是 $u\sqrt{u^2 - 2gh}/g$，所以当 $u^2 > 2gh$ 时，上界总是可以达到的。

留意当 $h > 0$ 时 $\tan\theta > 1$: 要在高于大炮的某个指定高度上射得最远, 发射角要比 45° 更陡。此外，该时刻的垂直速度为 $u\sin\theta - gt = (u^2 - g^2t^2)/(gt) = (2gh - u^2)/(gt) < 0$, 所以炮弹是在下降途中到达高度 h 处的最远点。

验算

- 当 $h = 0$ 时，上界为 u^2/g，而 $\tan\theta = 1$：这就是大家熟悉的平地最大射程，发射角为 45°。
- 当 $u = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 而 $h = 10\,\mathrm{m}$ 时，上界约为 29.15 m，此时 $\theta \approx 54.5°$。
- 我们以数值方法确认了该四次方程（quartic）在随机选取的轨迹上均成立，而且扫描数千个发射角，结果从未超过上界，但可以接近至相差不足 10^{-4}。上面求得的角则恰好达到上界。

常见错误

- 尝试把 x 对 θ 求导来找出最佳的 θ。这样做是可以的，但过程繁复。判别式已经替你完成了求最优值的工作。
- 忘记最后一步：判别式为零只给出 t 的一个值，但你仍须验证 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，以证明确实有一个实数角能给出这个值。

STEP 之外

炮弹以速率 u 发射时所能到达的点构成一个区域，其边界是所有轨迹的 包络线（envelope），即“安全抛物线”（parabola of safety）$y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}$。把本题的上界重新整理，可以看出 (x, h) 可以到达，当且仅当它位于这条抛物线上或其下方。曲线族的包络线同样源自“重根”这个想法，并且会在变分法（calculus of variations）和光学（焦散线，caustics）中再次出现。想进一步了解抛体（projectiles）及其背后的力学，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。