详细解答

STEP I 1994，第 8 题

纯数学 · 代换积分法

> **STEP I 1994，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q8

关键思路

代换（substitution）$\theta = \frac{1}{4}\pi - \phi$ 把区间 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 反射到自身，而复角公式（addition formula）则把 $1 + \tan(\frac{1}{4}\pi - \phi)$ 化为 $2/(1 + \tan\phi)$。于是原来的积分会带着负号在等式右边重现，我们只须把它解出来，而不必计算任何困难的积分。后面两个积分其实是同一个积分的变相：一个经代换 $x = \tan\theta$ 得出，另一个则经半角公式（half-angle formulae）得出。

解答

第一个积分

把这个积分记为 I。设 $\theta = \frac{1}{4}\pi - \phi$，则 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$；当 $\theta = 0$ 时，$\phi = \frac{1}{4}\pi$，而当 $\theta = \frac{1}{4}\pi$ 时，$\phi = 0$。因此

$$I = \int_{\frac{1}{4}\pi}^{0} \ln(1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi))\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi))\,\mathrm{d}\phi.$$

利用复角公式及 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$，

$$1 + \tan(\tfrac{1}{4}\pi - \phi) = 1 + \frac{1 - \tan\phi}{1 + \tan\phi} = \frac{2}{1 + \tan\phi}.$$

（在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上有 $\tan\phi \geq 0$，所以没有任何式子等于零，而每个对数都是取正数的对数。）故此

$$I = \int_{0}^{\frac{1}{4}\pi} (\ln 2 - \ln(1 + \tan\phi))\,\mathrm{d}\phi = \tfrac{1}{4}\pi \ln 2 - I,$$

因为最后一个积分正是 I，只是哑变量（dummy variable）换了名称。

想一想 我们由始至终没有求出原函数（antiderivative）。为甚么可以这样做?

我们根本不需要原函数。I 只是一个数，而代换给出了这个数必须满足的方程 $I = \frac{1}{4}\pi\ln 2 - I$。解之，得

$$2I = \tfrac{1}{4}\pi\ln 2 \quad\Longrightarrow\quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{8}\pi\ln 2,$$

正是所求。

含 $1+x^2$ 的积分

因子 $\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ 提示我们设 $x=\tan\theta$，于是 $\mathrm{d}x = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = (1+x^2)\,\mathrm{d}\theta$。积分上下限 $x=0$ 和 $x=1$ 变成 $\theta=0$ 和 $\theta=\frac{1}{4}\pi$。因此

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \ln(1+\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{8}\pi\ln 2.$$

含 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的积分

把它记为 J。最快捷的方法是利用对称性（symmetry）：代换 $x = \frac{1}{2}\pi - u$ 把 sin 和 cos 互换，并把 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 映射到自身，所以

$$J = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\left(\frac{1+\cos u}{1+\sin u}\right)\mathrm{d}u = -J,$$

因此 $J=0$。（换个说法，$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\ln(1+\sin x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\ln(1+\cos x)\,\mathrm{d}x$ 相等，所以两者之差为零。）

想一想 第一个结果在哪里派上用场?

J 与 I 之间的关系值得一看，这大概也是题目把它放在这里的原因。设 $t = \frac{1}{2}x$，由半角公式得

$$1+\cos x = 2\cos^2 t, \qquad 1+\sin x = (\cos t+\sin t)^2,$$

所以

$$\frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \frac{(\cos t+\sin t)^2}{2\cos^2 t} = \tfrac{1}{2}(1+\tan t)^2.$$

当 x 取遍 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 时，t 取遍 $[0, \frac{1}{4}\pi]$，且 $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$。因此

$$J = \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (2\ln(1+\tan t) - \ln 2)\,2\,\mathrm{d}t = 4I - \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 = \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 - \tfrac{1}{2}\pi\ln 2 = 0,$$

与对称性的论证吻合。所以

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln\left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

验算

用辛普森法则（Simpson's rule）计算，tan 的积分和含 $1+x^2$ 的积分都得出 0.2721982613，与 $\frac{1}{8}\pi\ln 2 = 0.2721982613\ldots$ 相符；第三个积分在机器精度之内等于 0。也可以用手粗略验算：被积函数（integrand）$\ln(1+\tan\theta)$ 由 0 上升至 $\ln 2$，所以 I 应约为 $\frac{1}{4}\pi\ln 2$ 的一半。这恰好就是答案。

常见错误

- 忘记了 $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$，同时也忘记了上下限要对调。这两次变号会互相抵消；若只保留其中一次，便会得出 $I = -\frac{1}{4}\pi\ln 2 - I$（以及一个正积分竟得负数答案）。
- 写成 $\tan(\frac{1}{4}\pi - \phi) = 1 - \tan\phi$，漏掉了复角公式中的分母。
- 在第三个积分上花了很长时间，却没有留意到 $x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$ 这个对称性。

STEP 之外

以反射作代换，再把结果与原式相加，从而得到 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$，这个技巧在某些书中称为 King 性质（King property）。它同样能给出经典结果 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\ln\sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi\ln 2$。在大学里，这类结果属于含参数定积分（definite integrals with parameters）和围道积分（contour integration）的理论，当中一整族的积分都可以不求原函数而算出来。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）展示了复变方法如何得出这类结果，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）则有更多运用这类对称技巧的 STEP 式练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。