详细解答

# STEP I 1994，第 6 题

纯数学 · 复函数的复合

**STEP I 1994，第 6 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/94-s1-q6

## 关键思路

要求一个商的实部（real part）和虚部（imaginary part），可把分子和分母同乘以分母的共轭（conjugate）；由于 $x$ 是实数，这个共轭很容易写出来。至于重复施行函数的部分，与其把 (i) 中繁复的实部和虚部再代入公式一次，不如对一般的 $z$ 以代数方法把 f 与自身复合（compose），这样简洁得多。一旦把 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(z))$ 化成整齐的形式，最后一部分只需一行代入便可完成。

## 解答

由于 $x$ 是实数，$\mathrm{i}x+1$ 的实部为 1，所以它永不为零，因此 $\mathrm{f}(x)$ 对每个实数 $x$ 都有定义。

### 第 (i) 部分

因为 $x$ 是实数，$\mathrm{i}x+1$ 的共轭是 $1-\mathrm{i}x$。把分子和分母同乘以它，

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x)=\frac{(\mathrm{i}x-1)(1-\mathrm{i}x)}{(1+\mathrm{i}x)(1-\mathrm{i}x)}&=\frac{\mathrm{i}x+x^2-1+\mathrm{i}x}{1+x^2}\\&=\frac{x^2-1}{x^2+1}+\mathrm{i}\,\frac{2x}{x^2+1}.\end{aligned}$$

两个分数都是实数，所以它们正是所求的实部和虚部。

### 第 (ii) 部分

对任何复数 $w$，$ww^*=(\operatorname{Re}w)^2+(\operatorname{Im}w)^2$。利用第 (i) 部分，

$$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(x)^*=\frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{x^4+2x^2+1}{(x^2+1)^2}=1.$$

所以 $|\mathrm{f}(x)| = 1$：f 把每个实数映射到单位圆（unit circle）上的一点。

### 第 (iii) 部分

我们不把 (i) 的答案代入 f，而是对一般的 $z$ 进行复合。设 $w = \mathrm{f}(z) = \dfrac{\mathrm{i}z-1}{\mathrm{i}z+1}$，并把 $\mathrm{f}(w) = \dfrac{\mathrm{i}w-1}{\mathrm{i}w+1}$ 的分子和分母同乘以 $\mathrm{i}z+1$：

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(\mathrm{f}(z)) &= \frac{\mathrm{i}(\mathrm{i}z-1)-(\mathrm{i}z+1)}{\mathrm{i}(\mathrm{i}z-1)+(\mathrm{i}z+1)} = \frac{-z-\mathrm{i}-\mathrm{i}z-1}{-z-\mathrm{i}+\mathrm{i}z+1} \\ &= \frac{-(1+\mathrm{i})(z+1)}{(1-\mathrm{i})(1-z)} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\cdot\frac{z+1}{z-1} = \mathrm{i}\,\frac{z+1}{z-1},\end{aligned}$$

这是因为 $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \mathrm{i}$。

> **想一想** $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ 是否对每个实数 $x$ 都有定义？

不是。我们需要 $\mathrm{i}w+1 \neq 0$，即 $\mathrm{f}(x) \neq \mathrm{i}$。由第 (i) 部分，$\mathrm{f}(x) = \mathrm{i}$ 需要 $x^2-1=0$ 及 $2x = x^2+1$，而这只在 $x=1$ 时成立。这与上式分母中的因式 $x-1$ 吻合。所以对实数 $x \neq 1$，

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{i}\,\frac{x+1}{x-1}, \qquad \text{所以} \qquad \operatorname{Re}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = 0, \quad \operatorname{Im}\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \frac{x+1}{x-1}.$$

第一次施行 f 把实数线映射到单位圆，第二次则把单位圆映射到虚轴。

### 第 (iv) 部分

写 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = \mathrm{i}y$，其中 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ 是实数。于是 $\mathrm{i}(\mathrm{i}y) = -y$，所以

$$\mathrm{f}(\mathrm{i}y) = \frac{-y-1}{-y+1} = \frac{y+1}{y-1}.$$

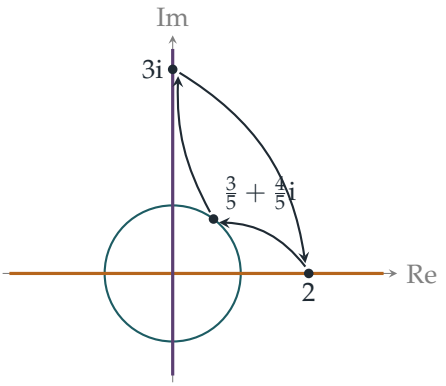
这个式子有定义，因为 $y=1$ 需要 $x+1 = x-1$，而这是不可能的。现在

$$y+1 = \frac{2x}{x-1}, \qquad y-1 = \frac{2}{x-1},$$

所以

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))) = x \qquad \text{对每个实数} x \neq 1.$$

施行 f 三次便回到起点：第三次施行把虚轴送回实数线。下图显示 $x=2$ 时的循环，即 $2 \mapsto \frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i} \mapsto 3\mathrm{i} \mapsto 2$。




## 验算

- $x=0$：$\mathrm{f}(0)=-1$，它在单位圆上，与 (i) 一致。然后 $\mathrm{f}(-1)=\dfrac{-\mathrm{i}-1}{-\mathrm{i}+1}=-\mathrm{i}$，与 $\mathrm{i}\frac{0+1}{0-1}$ 吻合，而 $\mathrm{f}(-\mathrm{i})=\frac{1-1}{1+1}=0$。
- $x=2$：第 (i) 部分给出 $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\mathrm{i}$，第 (iii) 部分给出 3i，第 (iv) 部分则回到 2。以 $10^4$ 个随机实数 $x$（以及随机复数 $z$）作数值检验，结果证实以上每条公式都准确至舍入误差之内。

## 常见错误

- 把 (i) 的实部和虚部直接代入 f。这样做是可行的，但代数运算繁重，容易出错。以 $z$ 来进行复合则简洁得多。
- 忘记在 (iii) 和 (iv) 中必须排除 $x=1$，因为 $\mathrm{f}(1)=\mathrm{i}$，而 $\mathrm{f}(\mathrm{i})$ 的分母为零。

## STEP 之外

形如 $z\mapsto\dfrac{az+b}{cz+d}$ 的函数称为莫比乌斯变换（*Möbius transformation*）。这类映射把圆和直线映射到圆和直线，正如我们在这里所见：实轴到单位圆，再到虚轴，然后返回实轴。把两个这样的变换复合，相当于把 $2\times2$ 矩阵 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 相乘。事实上，对每个复数 $z$ 都有 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(z)))=z$，所以 f 在莫比乌斯变换所组成的群（group）中的阶（order）为 3。此外，在 (i) 中代入 $x=\tan\frac{\theta}{2}$，可得 $\mathrm{f}(x)=-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，这就是大家熟悉的“$t$ 代换”圆参数化（parametrisation）。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 中有一章精彩地讲述莫比乌斯变换及其几何。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。