详细解答

STEP I 1994，第 5 题

纯数学 · 抛物线上的轨迹

> **STEP I 1994，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q5

关键思路

先把几何条件化为代数条件。原点处的角是直角，即位置向量（position vector）$\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 互相垂直；对于 $y = x^2$ 上的点，这个条件可简化为 p 与 q 之间一个简洁的关系式。这样一来，R 和 T 两点的坐标都是关于 p 和 q 对称的，所以我们把一切都用 $p+q$ 和 pq 表示，然后消元。

解答

直角的条件

P 和 Q 都不可能是原点，否则该角便没有定义，所以 $p \neq 0$ 且 $q \neq 0$。角 POQ 是直角，当且仅当 $\overrightarrow{OP} = (p, p^2)$ 与 $\overrightarrow{OQ} = (q, q^2)$ 的纯量积（scalar product）为零：

$$pq + p^2q^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad pq(1+pq) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad pq = -1,$$

其中最后一步除以 $pq \neq 0$。（等价的说法是：OP 与 OQ 的斜率（gradient）分别为 p 和 q，两者之积为 -1。）

因此我们要找的数对，正是 $q = -1/p$，其中 $p \neq 0$。当 p 取遍所有非零实数时，两数之和

$$s = p + q = p - \frac{1}{p}$$

可取得每一个实数值：任意给定 s，二次方程 $p^2 - sp - 1 = 0$ 的判别式（discriminant）为 $s^2 + 4 > 0$，所以它有实根，而且两根之积为 -1，故两根皆不为零。我们稍后需要这个结论，才能说明下面的轨迹（locus）是完整的曲线，而不只是曲线的一部分。

第 (i) 部分

PQ 的中点（midpoint）是

$$R = \left(\frac{p+q}{2},\ \frac{p^2+q^2}{2} \right).$$

设 $R = (x, y)$，则 $p + q = 2x$。利用 $pq = -1$，

$$y = \frac{(p+q)^2 - 2pq}{2} = \frac{4x^2+2}{2} = 2x^2 + 1.$$

由于 $p + q$ 可取得每一个实数值，x 亦然，所以 R 的轨迹是整条抛物线（parabola）

$$y = 2x^2 + 1,$$

其顶点（vertex）为 $(0, 1)$，对称轴为 y 轴。它比 $y = x^2$ 窄，而且完全位于后者的上方，因为 $2x^2 + 1 - x^2 = x^2 + 1 > 0$；这与 R 是凸（convex）曲线上一条弦（chord）的中点这一事实吻合。

第 (ii) 部分

对 $y = x^2$ 求导，可知在 P 的切线（tangent）斜率为 $2p$，所以切线方程为

$$y - p^2 = 2p(x - p), \qquad \text{即} \qquad y = 2px - p^2,$$

同理，在 Q 的切线为 $y = 2qx - q^2$。这两条切线并不平行，因为 $p \neq q$（两者之积为 -1，所以不可能相等）。把两条方程相减，

$$2(p - q)x = p^2 - q^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{p+q}{2},$$

其中除以了 $p - q \neq 0$。于是

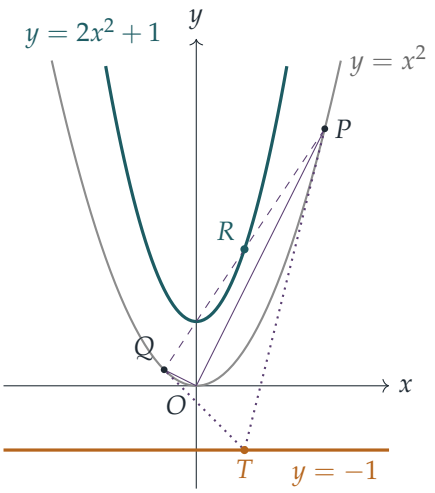
$$y = 2p \cdot \frac{p+q}{2} - p^2 = pq = -1.$$

? **想一想** T 的 y 坐标是常数。那么轨迹是单独一点、一条线段，还是整条直线?

T 的 x 坐标是 $\frac{1}{2}(p + q)$，而我们已证明它可取得每一个实数值。所以 T 可以位于该直线上的任何位置，T 的轨迹就是整条直线

$$y = -1.$$

还可留意，T 总是在 R 的正下方：两者的 x 坐标都是 $\frac{1}{2}(p + q)$。



图中所示是其中一个位置，$p = 2$，$q = -\frac{1}{2}$：此时 $R = (\frac{3}{4}, \frac{17}{8})$ 在蓝绿色的抛物线上，而 $T = (\frac{3}{4}, -1)$ 在琥珀色的直线上。

验算

取 $p = 1$，$q = -1$：则 $P = (1, 1)$，$Q = (-1, 1)$，而 OP、OQ 就是直线 $y = \pm x$，显然互相垂直。中点是 $(0, 1)$，即 $y = 2x^2 + 1$ 的顶点；两条切线 $y = 2x - 1$ 与 $y = -2x - 1$ 相交于 $(0, -1)$，在 $y = -1$ 上。再取图中的 $p = 2$，$q = -\frac{1}{2}$，则 $2 \cdot (\frac{3}{4})^2 + 1 = \frac{17}{8}$，与预期相符。另外以 10^5 个随机的 p 值作数值检验，结果确认 R 满足 $y = 2x^2 + 1$，误差约在 10^{-10} 以内，而 T 的坐标总是满足 $y = -1$。

常见错误

- 写到 $pq(1 + pq) = 0$ 便停下，没有解释为何可排除 $pq = 0$：这种情况会令 P 或 Q 落在原点。
- 只写出轨迹的方程，却没有检查是否每一个 x 值都能取得，以确定所画的草图应是整条曲线而不是其中一部分。
- 以为 T 位于准线（directrix）上。$y = x^2$ 的准线是 $y = -\frac{1}{4}$；当 PQ 通过焦点（focus）时，两条切线才会在准线上相交，这与 $\angle POQ = 90^\circ$ 是不同的条件。

STEP 之外

这里的弦 PQ 总是通过定点 $(0,1)$：它的方程是 $y=(p+q)x-pq=(p+q)x+1$。通过一个定点的直线族，以及与之对应、由切线相交而成的“极点”（pole）（这里它们位于直线 $y=-1$ 上，即 $(0,1)$ 的极线（polar）），正是射影几何（projective geometry）的起点；射影几何会有系统地研究圆锥曲线（conics）及其极点与极线的关系。想做更多同类题目，可参考 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。