详细解答

STEP I 1994，第 4 题

纯数学 · 反正切积分

> **STEP I 1994，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q4

关键思路

第 (i) 部分是一条半角恒等式（half-angle identity），第 (ii) 部分则是标准的“先配方（complete the square），再用 $\tan^{-1}$”积分。最后的积分就是第 (ii) 部分取 $k = \cos\alpha$ 的情况，这时 $\sqrt{1-k^2} = \sin\alpha$，刚好与分子的因子 $\sin\alpha$ 约去。唯一真正要小心的地方在最后：对某个角的正切取 $\tan^{-1}$，只有当该角落在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 之内时，才会得回原来的角。

解答

第 (i) 部分

利用二倍角公式（double-angle formulae）$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{1}{2}\alpha$ 及 $\sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$，

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = \tan\tfrac{1}{2}\alpha,$$

只要 $\sin\alpha \neq 0$（使等式两边均有定义），上式便成立。这正是所要证明的结果。

第 (ii) 部分

将分母配方：

$$1 - 2kx + x^2 = (x-k)^2 + (1-k^2).$$

由于 $|k| < 1$，常数 $1-k^2$ 为正数，故可写成 $1-k^2 = a^2$，其中 $a = \sqrt{1-k^2} > 0$。（条件 $|k| < 1$ 正是用在这里：否则分母可以因式分解，得到的便会是对数而不是反正切。）作代

换（substitution）$x-k=a\tan\theta$，则 $\mathrm{d}x=a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-k)^2+a^2}&=\int\frac{a\sec^2\theta}{a^2\tan^2\theta+a^2}\,\mathrm{d}\theta=\int\frac{1}{a}\,\mathrm{d}\theta=\frac{\theta}{a}+C\\&=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-k}{\sqrt{1-k^2}}\right)+C,\end{aligned}$$

这就是所求的结果。（另一做法是对右边求导：由链式法则（chain rule）可得 $\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1/a}{1+(x-k)^2/a^2}=\dfrac{1}{(x-k)^2+a^2}$。）

最后的积分

取 $k=\cos\alpha$。由于 $0<\alpha<\pi$，我们有 $|k|<1$，所以第 (ii) 部分适用；又因为 $\sin\alpha>0$，可得

$$\sqrt{1-k^2}=\sqrt{\sin^2\alpha}=\sin\alpha$$

（而不是 $-\sin\alpha$，因为在这个区间上 $\sin\alpha>0$）。因此分子的因子 $\sin\alpha$ 与第 (ii) 部分的因子 $1/\sqrt{1-k^2}$ 互相约去：

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,\mathrm{d}x&=\left[\tan^{-1}\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\right]_0^1\\&=\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\\&=\tan^{-1}(\tan\tfrac{1}{2}\alpha)+\tan^{-1}(\cot\alpha),\end{aligned}$$

其中第一项用了第 (i) 部分，第二项则用了 $\tan^{-1}$ 是奇函数（odd function）这一事实。

> **想一想** $\tan^{-1}(\tan\theta)$ 是否总是等于 θ?

不是：$\tan^{-1}$ 的取值范围是 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，所以只有当 θ 在这个区间内时，才有 $\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta$。我们逐项检查。

- 由于 $0<\alpha<\pi$，我们有 $0<\frac{1}{2}\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\tan^{-1}\left(\tan\frac{1}{2}\alpha\right)=\frac{1}{2}\alpha$。
- 写成 $\cot\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$。由于 $0<\alpha<\pi$，角 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 落在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 之内，所以 $\tan^{-1}(\cot\alpha)=\frac{\pi}{2}-\alpha$。

两项相加，

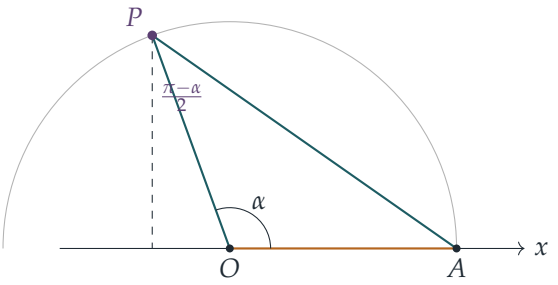
$$\int_0^1\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}-\alpha=\frac{\pi-\alpha}{2},$$

这就是所求的结果。

另一做法：一幅图

这个答案背后有一个很漂亮的几何原因。设 $P=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 为单位圆上的一点，O 为原点，$A=(1,0)$。当点 $X=(x,0)$ 沿 x 轴移动时，PX 与过 P 向下的铅垂线之间的夹角 θ 满

足 $\tan\theta = (x-\cos\alpha)/\sin\alpha$，而被积函数（integrand）正好就是 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$。所以这个积分就是 X 由 O 移到 A 时所扫过的角，即角 OPA。三角形 OPA 是等腰三角形，$OP = OA = 1$，在 O 处的顶角为 α，所以两个底角各为 $\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$。



验算

- 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时，积分为 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$，而公式给出 $\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$。
- 数值上，取 $\alpha = 1$，以辛普森法则（Simpson's rule）计算得 $1.0707963\ldots$，与 $\frac{1}{2}(\pi-1) = 1.0707963\ldots$ 吻合。
- 当 $\alpha \to \pi^-$ 时，对 $[0,1]$ 内的每个 x，被积函数都趋向 0，而 $\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$ 亦然。

常见错误

- 写下 $\tan^{-1}(\cot\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$，却没有检查 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 是否落在 $\tan^{-1}$ 的值域之内；当 α 在 $(0,\pi)$ 以外时，同样的做法便会出错。
- 把 $\sqrt{1-\cos^2\alpha} = |\sin\alpha|$ 当作 $\sin\alpha$，却没有说明原因；这里的原因是 $0 < \alpha < \pi$。

STEP 之外

当 $\alpha \to 0^+$ 时，答案趋向 $\frac{\pi}{2}$，尽管在 $\alpha = 0$ 时被积函数恒等于零：被积函数在 $x = 1$ 附近变成一个又高又窄的尖峰，而其面积并不缩小。这就是半平面的泊松核（Poisson kernel），而随意交换极限与积分的次序便会得出错误的答案。这种交换在甚么情况下才容许，是大学一年级分析学（analysis）的核心问题；参见 Abbott 的 *Understanding Analysis*。至于“所对的角”这个几何观点，Needham 的 *Visual Complex Analysis* 有十分精彩的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。