详细解答

STEP I 1994，第 11 题

力学 · 斜面上的连接质点

STEP I 1994，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

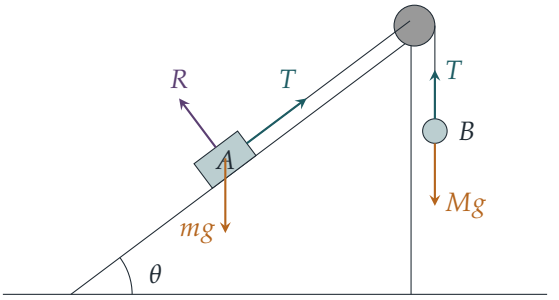
step.maths.org/questions/94-s1-q11

关键思路

先从几何入手。绳子的长度恰好等于轨道的长度，所以当货车位于底部时，小球正好悬在滑轮处。因此小球下落的距离就是斜面的高度 $d\sin\theta$，而货车亦沿斜面向上移动相同的距离。绳子拉紧期间，整个系统以同一个恒定加速度运动。小球一着地，绳子便会松弛，货车只是沿着光滑斜面向上滑行。所以第 (ii) 部分要问的是：货车余下的速率能否把它带到滑轮处。

解答

我们把货车和小球视为质点（particle），轨道视为光滑（smooth），绳子视为轻而不可伸长（light and inextensible），并跨过一个轻而无摩擦的滑轮（pulley）。因此两边的张力（tension）T 相同，而且在绳子拉紧期间，货车和小球的速率相同。



第 (i) 部分

设 a 为小球向下的加速度，这也是货车沿斜面向上的加速度。对小球（沿铅垂方向）和对货车（沿斜面方向）分别应用牛顿第二定律（Newton's second law），得

$$Mg - T = Ma,$$
$$T - mg\sin\theta = ma.$$

法向反作用力（normal reaction）R 与斜面垂直，并不出现在方程之中。把两式相加便可消去 T：

$$a = \frac{(M - m\sin\theta)\,g}{M+m}.$$

系统由静止开始，所以只有当 $a > 0$ 时小球才会移动。（若 $a \le 0$，则甚么也不会发生：当 $a = 0$ 时系统保持平衡；而绳子不能推物，所以 $a < 0$ 是不可能的。）因此，小球落到地面，当且仅当

$$M > m\sin\theta.$$

当货车位于轨道底部时，整条长度为 d 的绳子都贴着斜面，所以小球起初与滑轮同高，离地面的高度为 $d\sin\theta$。它由静止开始以恒定加速度 a 下落这段距离，所以由 $v^2 = u^2 + 2as$ 得

$$v^2 = 2\cdot\frac{(M - m\sin\theta)g}{M+m}\cdot d\sin\theta = \frac{2g(M - m\sin\theta)\,d\sin\theta}{M+m},$$

这正是所要求的结果。

第 (ii) 部分

小球着地时，货车已沿轨道向上移动了 $d\sin\theta$，并正以速率 v 运动。此时它与滑轮之间还余下距离

$$d - d\sin\theta = d(1-\sin\theta)$$

。

想一想 小球着地之后，绳子会怎样?

小球停了下来，但货车仍然沿斜面向上、朝着滑轮运动。所以绳子变得松弛，$T = 0$。这时沿斜面方向唯一的力就是重力的分量，所以货车以 $g\sin\theta$ 减速。它再走一段距离 s 后便会静止，这段距离由 $0 = v^2 - 2g\sin\theta\, s$ 给出：

$$s = \frac{v^2}{2g\sin\theta} = \frac{(M - m\sin\theta)\,d}{M+m}.$$

（其后货车会滑回斜面下方，滑轮附近不会再有任何事情发生。）

如果货车在到达滑轮之前停下，即 $s < d(1-\sin\theta)$，它便不会与滑轮相撞。由于 $d > 0$ 及 $M + m > 0$，这个条件等价于

$$\begin{aligned} M - m\sin\theta &< (M+m)(1-\sin\theta) \\ &= M + m - M\sin\theta - m\sin\theta, \end{aligned}$$

化简后得 $M\sin\theta < m$。

把这个结果与第 (i) 部分结合起来，小球到达地面而货车又在滑轮之前停下，恰好是在以下情况：

$$m\sin\theta < M < \frac{m}{\sin\theta}.$$

若 $M\sin\theta = m$，货车刚好以零速率到达滑轮。那只是轻轻碰到，不算相撞。

验算

- 货车沿轨道向上所能到达的最远距离是 $d\sin\theta + s = \dfrac{Md(1+\sin\theta)}{M+m}$。这个距离小于 d，恰好是在 $M\sin\theta < m$ 的时候，与上面的条件吻合。当 $m \to 0$ 时，它趋向 $d(1+\sin\theta) > d$：一辆没有重量的货车必定会撞上滑轮，正如你所预料的一样。
- 当 $\theta = 90^\circ$ 时，条件 $M < m$ 与第 (i) 部分的 $M > m\sin\theta = m$ 互相矛盾。这是对的：在铅垂的轨道上，货车从滑轮正下方的底部出发，小球从顶部出发，而货车上升的距离恰好等于小球下落的距离，也就是一直升到滑轮处。
- 以数值计算，取 $m = 2$、$M = 1.5$、$\theta = 30^\circ$、$d = 3$ 及 $g = 9.8$，公式给出 $v^2 = 4.2$，而最远点为 $\frac{27}{14} \approx 1.93 < 3$。以细小的时间步长逐步模拟这个运动，得到相同的数值。随机抽取的例子亦证实，相撞恰好在 $M\sin\theta > m$ 时发生。

常见错误

- 把小球下落的距离当作 d 而不是 $d\sin\theta$。小球从滑轮处出发，而滑轮的高度是 $d\sin\theta$。
- 假设小球着地后绳子仍然拉紧，或者完全忘记了滑行阶段，只把 $d\sin\theta$ 与 d 作比较。
- 绳子松弛之后，计算货车的减速度时用了 g 而不是 $g\sin\theta$。

STEP 之外

这道题把运动分成约束条件不同的几个阶段：先是绳子拉紧，然后是绳子松弛。这是*单侧约束*（*unilateral constraint*）最简单的例子：这种约束只能拉，不能推。这类约束在力学中随处可见，从滑落桌面的链条，到机械人学中的接触问题都有。这里用能量方法可以得到

一个快捷的另解：在滑行阶段，货车的动能（kinetic energy）$\frac{1}{2}mv^2$ 转化为势能（potential energy）$mgs\sin\theta$。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对这两种观点都有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。