详细解答

STEP I 1994，第 10 题

力学 · 圆周运动

> **STEP I 1994，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/94-s1-q10

关键思路

这是一个用可伸长的绳系着的圆锥摆（conical pendulum）。质点没有垂直方向的加速度，所以张力（tension）的垂直分量与重量平衡，而水平分量则提供向心力（centripetal force）。新的地方在于圆的半径取决于伸长量（extension），而伸长量又取决于张力，于是虎克定律（Hooke's law）把一切连系起来。至于不等式，则来自这个问题：$\cos\theta$ 取哪些值才真正描述一个圆?

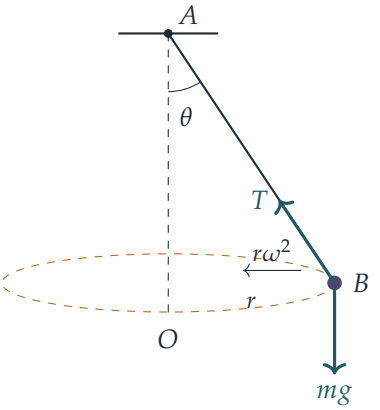
解答

求 $\cos\theta$

把 B 视为质点（particle），把 AB 视为符合虎克定律的轻弹性绳（light elastic string）。设伸长量为 x，张力为 T，则

$$T = \frac{\lambda x}{l}, \qquad AB = l + x.$$

质点绕着 A 正下方的点 O，在半径为 $r = (l + x)\sin\theta$ 的水平圆上运动。作用于质点的力只有它的重量和沿 BA 方向的张力。



沿垂直方向分解（没有垂直加速度）：

$$T\cos\theta = mg. \tag{1}$$

沿水平方向分解，指向圆心 O（加速度为 $r\omega^2$）：

$$T\sin\theta = m\omega^2(l+x)\sin\theta.$$

要是真正的圆，必须 $\sin\theta \neq 0$，所以可以把它约去：

$$T = m\omega^2(l+x). \tag{2}$$

现在由虎克定律得 $\lambda x/l = m\omega^2(l+x)$，即

$$x\left(\lambda - m\omega^2 l\right) = m\omega^2 l^2.$$

由于 $x > 0$（由 (1) 得 $T > 0$，所以绳处于拉伸状态）而且 $m\omega^2 l^2 > 0$，可知 $\lambda - m\omega^2 l > 0$，并且

$$x = \frac{m\omega^2 l^2}{\lambda - m\omega^2 l}, \qquad l + x = \frac{l\lambda}{\lambda - m\omega^2 l}.$$

于是由 (2) 得

$$T = \frac{m\omega^2 l\lambda}{\lambda - m\omega^2 l},$$

再由 (1) 得

$$\boxed{\cos\theta = \frac{mg}{T} = \frac{g\left(\lambda - m\omega^2 l\right)}{l\lambda\,\omega^2}}$$

运动何时可能发生

想一想 对 $\cos\theta$ 的每一个限制，在物理上各代表甚么？

要质点在 A 下方的水平圆上运动，而且绳保持拉紧，我们需要 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$，即 $0 < \cos\theta < 1$。反过来说，如果 ω 代入公式后得出 $0 < \cos\theta < 1$，那么把上述步骤逆推回去（其中 $\lambda - m\omega^2 l > 0$），便会得到满足 (1) 和 (2) 的正伸长量和正张力，所以这个运动确实存在。

上界。由于其余因子均为正数，$\cos\theta > 0$ 成立当且仅当 $\lambda - m\omega^2 l > 0$。这就是

$$\omega^2 < \frac{\lambda}{ml}.$$

物理意义：如果 ω 太大，绳无论伸长多少（只要是有限的）都无法提供所需的向心力，因为多出来的长度所需要的额外的力，增长得比绳所能提供的还要快。

下界。$\cos\theta < 1$ 即是

$$g\lambda - gm\omega^2 l < l\lambda\omega^2 \iff g\lambda < \omega^2 l(\lambda + mg) \iff \omega^2 > \frac{g\lambda}{l(\lambda + mg)},$$

其中我们先除以 $l\lambda\omega^2 > 0$，最后除以 $l(\lambda + mg) > 0$，所以不等号的方向保持不变。物理意义：如果 ω 太小，公式便会要求 $\cos\theta \geq 1$；唯一的可能就是质点静止地悬挂在轴上（$\theta = 0$），而这并不是圆周运动（circular motion）。

把两者合起来，这个运动只有在以下条件下才可能发生：

$$\frac{g\lambda}{l(\lambda + mg)} < \omega^2 < \frac{\lambda}{ml},$$

这正是所要证明的结果。

验算

- 在下界处，$\cos\theta = 1$：这时绳是垂直的，张力为 mg，长度为 $l(\lambda + mg)/\lambda$，恰好就是质点悬挂时的平衡长度。留意 $\omega^2 = g/(\text{该长度})$，即熟悉的圆锥摆临界条件 $\omega^2 > g/L$。
- 当 $\lambda \to \infty$（不可伸长的绳）时，结果变成 $\cos\theta = g/(l\omega^2)$，即标准的圆锥摆，而范围则变成 $\omega^2 > g/l$。
- 数值上，取 $g = 9.8$ 并随机选取 m、l、λ 和 ω，直接用二分法（bisection）解虎克定律和水平方向的方程，所得的 $\cos\theta$ 与公式相同，而且两条分解所得的方程都成立；在 20 000 个随机个案中，运动存在当且仅当不等式成立。

常见错误

- 把半径取为 $l\sin\theta$ 而不是 $(l+x)\sin\theta$：绳是被拉长了的。
- 忘记说明为何可以除以 $\sin\theta$，因而看不出为甚么要排除 $\theta=0$（从而排除 $\cos\theta=1$）。
- 只证明了 $\cos\theta<1$，却忘记 $\cos\theta>0$（等价于伸长量为正）才给出上界。

STEP 之外

这个上界是失控（runaway）或不稳定性（instability）的一个简单例子：当 $\omega^2\to\lambda/(ml)$ 时，所需的伸长量会趋向无穷大。同样的效应也出现在旋转的弹性杆以及自旋物体的稳定性之中；而下界则是一个分歧（bifurcation），悬挂的平衡状态在那里让位予圆周运动。想进一步了解旋转参考系中的力学，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。