详细解答

STEP III 1993，第 9 题

纯数学 · 平方和不等式

> **STEP III 1993，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q9

关键思路

这里的每一条不等式（inequality），其实都是“平方和（sum of squares）非负”这句话的变装。第 (i) 部分是最简单的情形 $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$，而其后各部分的做法，是把 $(a_i - a_j)^2$ 对所有数对求和，再数清楚每个平方项和每个乘积项各出现多少次。一旦得到一般形式 (iv)，把 $(\sum a_i)^2$ 展开成平方项加交叉项（cross terms），便可推出 (v)。

全文沿用以下记号：

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \qquad P = \sum_{i<j} a_i a_j,$$

其中第二个和式遍历满足 $1 \leq i < j \leq n$ 的 $\binom{n}{2}$ 个数对。

解答

第 (i) 部分

由于实数的平方非负，

$$0 \leq (a_1 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2,$$

所以 $a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1 a_2$，等号成立当且仅当 $a_1 = a_2$。

第 (ii) 部分

把 (i) 分别应用于三个数对，然后相加：

$$a_2^2 + a_3^2 \geq 2a_2a_3,$$
$$a_3^2 + a_1^2 \geq 2a_3a_1,$$
$$a_1^2 + a_2^2 \geq 2a_1a_2.$$

每个平方项恰好在其中两行出现，所以相加后得

$$2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \geq 2(a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2),$$

再除以 2 便得所求结果。换一个写法，$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - (a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2) = \frac{1}{2}\left[(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2\right] \geq 0$，等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = a_3$。

第 (iii) 部分

现在满足 $1 \leq i < j \leq 4$ 的数对 (i, j) 共有六个。把 (i) 应用于每一个数对：

$$\sum_{1\leq i<j\leq 4} (a_i^2 + a_j^2) \;\geq\; 2 \sum_{1\leq i<j\leq 4} a_ia_j.$$

在左边，a_1^2 出现了多少次？每一个含有下标 1 的数对都令它出现一次，也就是与其余三个下标各配对一次。每个 a_k^2 的情况都相同，所以左边等于 $3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$，于是

$$3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) \geq 2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4),$$

这正是所求。

第 (iv) 部分

(i) 至 (iii) 的规律是：左边的系数比变量的个数少一，依次为 1、2（即第 (ii) 部分乘以 2）、3。

断言。对任意 $n \geq 2$ 及实数 $a_1, \ldots, a_n$，

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \;\geq\; 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j, \qquad \text{即} \qquad (n-1)S \geq 2P,$$

等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。

? **想一想** 把 $a_i^2 + a_j^2$ 对每一个数对 $i < j$ 求和时，某个指定的 a_k^2 会出现多少次？

证明。考虑所有数对的差的平方之和：

$$D = \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i - a_j)^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} \left(a_i^2 + a_j^2\right) - 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j.$$

下标 k 恰好属于 $n-1$ 个数对（它与其余 $n-1$ 个下标各配对一次），所以 a_k^2 在第一个和式中出现 $n-1$ 次。因此

$$D = (n-1)S - 2P.$$

D 的每一项都是实数的平方，所以 $D \geq 0$，由此得 $(n-1)S \geq 2P$。等号成立当且仅当每个 $(a_i - a_j)^2$ 都等于零，即当且仅当所有 a_i 都相等。 ■

取 $n = 2, 3, 4$，便分别重新得到 (i)、(ii) 的两倍，以及 (iii)。

第 (v) 部分

这里需要 $n \geq 2$，使得 $n - 1 > 0$。把和的平方展开，每个平方项出现一次，而每个 $i \neq j$ 的乘积 $a_i a_j$ 出现两次（分别以 $a_i a_j$ 和 $a_j a_i$ 的形式），所以

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = S + 2P.$$

想一想 (iv) 给出的是 S 的界，它怎样能帮助我们得到一个只提及 P 的界?

由于 $n - 1 > 0$，可以把 (iv) 除以 $n-1$ 而不必把不等号反转，得 $S \geq \dfrac{2P}{n-1}$。把 S 的这个下界（lower bound）代入：

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 &= S + 2P \\ &\geq \frac{2P}{n-1} + 2P \\ &= \frac{2P + 2(n-1)P}{n-1} \\ &= \frac{2n}{n-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j,\end{aligned}$$

这就是所求的不等式。等号成立当且仅当 (iv) 的等号成立，即所有 a_i 都相等。

留意我们从来不需要 P 为正数：整个论证只是在 $S \geq 2P/(n-1)$ 的两边同时加上 $2P$，无论 P 的正负如何，这一步都成立。

验算

- 全部相等：若每个 $a_i = c$，则 $S = nc^2$ 及 $P = \binom{n}{2}c^2 = \frac{1}{2}n(n-1)c^2$，所以 $(n-1)S = n(n-1)c^2 = 2P$，而在 (v) 中两边都等于 n^2c^2。两条不等式都取到等号，正如所料。
- 以数值检验 (iii)：取 $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 2, -3, 5)$，得 $S = 39$ 及 $P = -7$，所以

$3S = 117 \geq -14 = 2P$；而在 (v) 中，$(\sum a_i)^2 = 25 \geq \frac{8}{3}(-7) = -\frac{56}{3}$。（另外 $S + 2P = 39 - 14 = 25$，亦正如所料。）

- 我们亦以有理数运算，在 20 000 个长度由 2 至 9 的随机数组上，以及一些非常接近等号情况的数组上，精确地检验了恒等式（identity）$D = (n-1)S - 2P$ 和两条不等式，并没有发现反例（counterexample）。

常见错误

- 数错次数：每个 a_k^2 在 $\sum_{i<j}(a_i^2 + a_j^2)$ 中出现 $n-1$ 次，不是 n 次，也不是 $\binom{n}{2}$ 次。
- 写成 $(\sum a_i)^2 = S + P$：每个交叉项在展开式中出现两次。
- 把 (iv) 除以 $n-1$ 时没有指出 $n - 1 > 0$，或忘记说明等号成立的情况。

STEP 之外

$D = (n-1)S - 2P$ 这个量等于各数与平均值之差的平方和的 n 倍，即 $n\sum(a_i - \bar{a})^2$，所以 (iv) 其实是在说方差（variance）非负。第 (v) 部分也可以看成柯西–施瓦兹不等式（Cauchy–Schwarz inequality）$(\sum a_i \cdot 1)^2 \leq n\sum a_i^2$ 的变装。在线性代数（linear algebra）中，这是说二次型（quadratic form）$(n-1)S - 2P$ 是半正定（positive semi-definite）的，而它的核（kernel）由全一向量张成。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）讲述二次型与正定性，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题）则提供更多 STEP 风格的不等式练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。