详细解答

STEP III 1993，第 8 题

纯数学 · 三维空间中的平面与直线

STEP III 1993，第 8 题

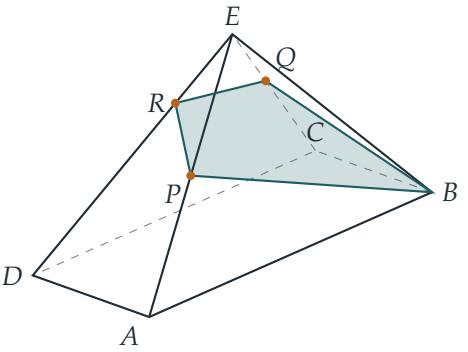
继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q8

关键思路

每条斜棱都是连接底面一个顶点与 E 的线段，所以斜棱上的每一点都有简单的参数式（parametric form）。因此 P、Q 和 R 可以一下子全部写出来，而通过 B、P 和 Q 的平面可以写成一条线性方程，其系数由代入这几点而得。至于第二部分，判断平行四边形（parallelogram）最简洁的方法，是检查两条对角线是否互相平分（bisect）；只需看一个坐标，便足以说明这个条件不成立。

解答



求 γ

棱 AE 由所有形如 $(ta, 0, (1-t)a)$ 的点组成，其中 $0 \le t \le 1$，因为沿着这条棱有 $x+z=a$。同样地，CE 是 $\{(-ta, 0, (1-t)a)\}$，而 DE 是 $\{(0, -ta, (1-t)a)\}$。所以

$$P = (\lambda a,\, 0,\, (1-\lambda)a), \qquad Q = (-\mu a,\, 0,\, (1-\mu)a), \qquad R = (0,\, -\gamma a,\, (1-\gamma)a).$$

我们设平面 BPQ 的方程为

$$px + qy + rz = a.$$

B、P、Q 三点不共线（collinear），所以它们确定唯一的一个平面。只要能找到满足全部三个条件的 p, q, r，这条方程就是该平面的方程。逐点代入：

$$\begin{aligned} B:&\quad qa = a, && \text{所以} q = 1,\\ P:&\quad p\lambda + r(1-\lambda) = 1,\\ Q:&\quad -p\mu + r(1-\mu) = 1. \end{aligned}$$

要消去 p，可把 P 的方程乘以 μ，把 Q 的方程乘以 λ，然后相加：

$$r(\mu - \lambda\mu + \lambda - \lambda\mu) = \lambda + \mu, \qquad \text{所以} \qquad r = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu-2\lambda\mu}.$$

分母是 $\lambda(1-\mu) + \mu(1-\lambda) > 0$，所以这样做没有问题。（下文用不着，但顺带一提：$p = (\lambda-\mu)/(\lambda+\mu-2\lambda\mu)$。）

现在 R 位于这个平面上，所以

$$-\gamma + r(1-\gamma) = 1 \quad\Longrightarrow\quad \gamma(1+r) = r-1 \quad\Longrightarrow\quad \gamma = \frac{r-1}{r+1}.$$

把各项通分，公分母为 $\lambda+\mu-2\lambda\mu$：

$$r-1 = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+\mu-2\lambda\mu}, \qquad r+1 = \frac{2(\lambda+\mu-\lambda\mu)}{\lambda+\mu-2\lambda\mu},$$

因此

$$\gamma = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu},$$

这正是所求。

值得留意的是 $0 < \gamma < 1$，所以 R 确实位于棱 DE 上，并且严格地在 D 与 E 之间。它为正数是显然的。至于 $\gamma < 1$，分母比分子大了 $\lambda+\mu-2\lambda\mu = \lambda(1-\mu) + \mu(1-\lambda) > 0$。

$BPRQ$ 不是平行四边形

想一想 按给定次序排列的四个点是否构成平行四边形，最快捷的判断方法是甚么？

四边形 $BPRQ$ 是平行四边形，当且仅当它的对角线 BR 与 PQ 互相平分，即

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}.$$

（这等价于 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{QR}$，即有一组对边相等且平行。）比较等式两边的 y 坐标：

$$\text{左边：}\ a-\gamma a=(1-\gamma)a, \qquad \text{右边：}\ 0+0=0.$$

两者必须相等，这就迫使 $\gamma=1$。但我们已证明 $\gamma<1$；事实上，$\gamma=1$ 会令 R 落在 E 上。所以两条对角线永远不会互相平分，$BPRQ$ 不可能是平行四边形。 ■

为求完整，补充一点：四边形的顶点确实是按 B,P,R,Q 的次序环绕排列的，因为平面依循环次序 EB,EA,ED,EC 与四条斜棱相交。即使把这几点另行配对，也无济于事。$B+P=Q+R$ 和 $B+Q=P+R$ 在 y 坐标上都需要 $a=-\gamma a$，而由于 $\gamma>0$，这是不可能的。

也可以从几何角度看出同一结论：BP 位于面 ABE 上，而 QR 位于面 CDE 上。这两个面相交于通过 E 且与 AB 平行的直线。分别位于这两个平面上的两条平行线，必定与这条公共直线平行。所以 $BP\parallel QR$ 会迫使 $BP\parallel AB$，而由于 $P\neq A$，这是不可能的。

验算

- 对称情况 $\lambda=\mu$：公式给出 $\gamma=\lambda/(2-\lambda)$。取 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$，结果是 $\frac{1}{3}$。直接计算：$p=0$，$r=2$，平面为 $y+2z=a$，它与 DE 相交于 $(0,-\frac{1}{3}a,\frac{2}{3}a)$，与预期相符。
- 极限 $\lambda,\mu\to1$：$P\to A$，$Q\to C$，平面变成底面，而 $\gamma\to1$，所以 $R\to D$，正如所料。
- 一个简洁的改写是 $\dfrac{1-\gamma}{\gamma}=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}+\dfrac{1-\mu}{\mu}$，很容易用数值来检验。例如 $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{2}{5}$ 给出 $\gamma=\frac{2}{7}\approx0.2857$。
- 我们随机选取了 2000 组 a,λ,μ，以分数作精确计算，核实了公式、$0<\gamma<1$ 以及关于平行四边形的结论。我们另外用独立的方法求出 R，即利用叉积（cross product）求平面的法向量（normal）。

常见错误

- 把 AE 的参数式写错：在 AE 上，坐标满足 $x+z=a$ 及 $y=0$，所以 P 的 z 坐标是 $(1-\lambda)a$，而不是 λa。
- 只在平面图上用斜率来检验 $BP\parallel QR$。这个四边形位于一个倾斜的平面上，所以应该用三维向量来处理。

► 忘记证明 $\gamma < 1$，而这正是平行四边形的论证所需要的。

STEP 之外

求平面与直线的交点，是解线性方程组（linear system）最简单的情况。由于 $EP : PA = (1-\lambda) : \lambda$，其他棱上的情况亦类似，所以结果说明

$$\frac{ER}{RD} = \frac{EP}{PA} + \frac{EQ}{QC},$$

这是一个不依赖坐标的命题，对任何通过 B 的平面都成立。因为它只用到直线上的比，所以对每一个以平行四边形为底的棱锥（pyramid）都成立：任何这样的棱锥都可以经仿射映射（affine map）变成本题的棱锥。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）对平面、法向量和线性方程组有完整而严谨的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。