详细解答

STEP III 1993，第 7 题

纯数学 · 双曲函数联立方程

> **STEP III 1993，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q7

关键思路

把两个二倍角的 sinh 展开。第二条方程随即直接以 y 表示 $\cosh x$，再用它去除第一条方程，便可同样以 y 表示 $\sinh x$。利用恒等式（identity）$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 可把 x 完全消去，剩下一条只含 $\sinh^2 y$ 的方程。之后要做的，就是找出三次方程（cubic）中合适的那个根，并以数值方法把它准确定出。

解答

消去 x

利用 $\sinh 2u = 2\sinh u \cosh u$，两条方程变成

$$2\sinh x \cosh x = \cosh y, \qquad 2\sinh y \cosh y = 2\cosh x.$$

由第二条方程得

$$\cosh x = \sinh y \cosh y.$$

由于 $\cosh x \geq 1 > 0$，我们可以把第一条方程除以 $2\cosh x$：

$$\sinh x = \frac{\cosh y}{2\sinh y \cosh y} = \frac{1}{2\sinh y},$$

其中除以 $\cosh y$ 并无问题，因为 $\cosh y > 0$；而 $\sinh y \neq 0$，因为 $\sinh y \cosh y = \cosh x \neq 0$。

现在把两者代入 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$。设 $t = \sinh^2 y$，则 $\cosh^2 y = 1 + t$：

$$t(1+t) - \frac{1}{4t} = 1.$$

两边乘以 $4t$（它不等于零），得 $4t^2 + 4t^3 - 1 = 4t$，即

$$4t^3 + 4t^2 - 4t - 1 = 0,$$

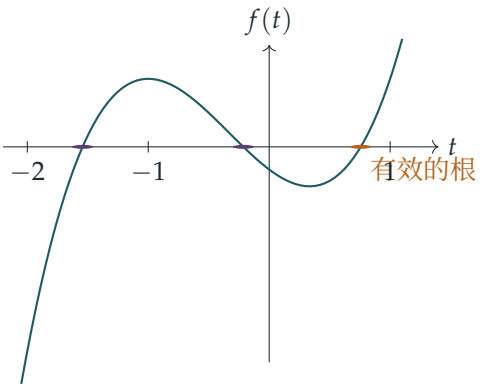
所以 $t = \sinh^2 y$ 是题目所给三次方程的一个根，正如所求。

最多只有一个有效解

设 $f(t) = 4t^3 + 4t^2 - 4t - 1$。由于 $t = \sinh^2 y$ 而 $\sinh y \neq 0$，有效的根必须满足 $t > 0$。现在

$$f(-2) = -9, \quad f(-1) = 3, \quad f(0) = -1, \quad f(1) = 3,$$

所以根据介值定理（intermediate value theorem），这个三次方程在 $(-2, -1)$、$(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 每个区间内各有一个根。三次方程最多有三个根，所以这些就是全部的根，而且恰好只有一个根是正数。



想一想 一个正的 t 给出两个值 $\sinh y = \pm\sqrt{t}$。为甚么只有一个能保留下来?

由 $\cosh x = \sinh y \cosh y$ 以及 $\cosh x > 0$、$\cosh y > 0$，可知必须有 $\sinh y > 0$。所以 $\sinh y = +\sqrt{t}$，而由于 sinh 是严格递增（strictly increasing）的，这恰好给出一个 y，且 $y > 0$。因此，这个三次方程最多给出一个有效的 y（然后 $\sinh x = 1/(2\sinh y)$ 便唯一地确定 x，因为 sinh 是一对一（one-to-one）的）。

确定 t 的位置并计算其值

我们有

$$f(0.7) = 1.372 + 1.96 - 2.8 - 1 = -0.468 < 0,$$
$$f(0.8) = 2.048 + 2.56 - 3.2 - 1 = 0.408 > 0,$$

所以根据介值定理，正根位于 0.7 与 0.8 之间。

我们使用牛顿–拉弗森迭代法（Newton–Raphson iteration）

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)}, \qquad f'(t) = 12t^2 + 8t - 4,$$

以中点 $t_0 = 0.75$ 为起始值。这里 $f(0.75) = -0.0625$，$f'(0.75) = 8.75$，所以

$$\begin{aligned} t_1 &= 0.75 + \frac{0.0625}{8.75} = 0.7571429, \\ t_2 &= 0.7570685, \\ t_3 &= 0.75706846, \end{aligned}$$

而 t_4 与 t_3 在所示的各位数字上完全一致。为确认六位小数，我们检查正负号的变化

$$f(0.7570680) < 0 < f(0.7570690),$$

所以根位于该区间内，而

$$t = 0.757068 \text{ （准确至六位小数）}.$$

（另一个较慢但完全可行的方法：把方程重新整理为 $t^2(4t+4) = 4t+1$，即 $t = \sqrt{(4t+1)/(4t+4)}$。在根的附近，右边的导数（derivative）约为 0.16，所以这个迭代收敛（converge），每一步增加略少于一位准确的小数。）

求 y 和 x

取正平方根，$\sinh y = \sqrt{0.7570685} = 0.870097$，所以

$$y = \operatorname{arsinh}(0.870097) = \ln\left(0.870097 + \sqrt{1.757068}\right) = 0.786474,$$

并且

$$\sinh x = \frac{1}{2\sinh y} = 0.574649, \qquad x = \ln\left(0.574649 + \sqrt{1.330221}\right) = 0.546965.$$

代入原来的方程验算：

$$\begin{aligned} \sinh 2x &= 1.325545 = \cosh y, \\ \sinh 2y &= 2.306704 = 2\cosh x, \end{aligned}$$

所以两条方程都成立。准确至四位小数，

$$x = 0.5470, \qquad y = 0.7865.$$

验算

- 三次方程的另外两个根约为 -0.2140 和 -1.5431：两者皆为负数，正如论证所要求。三个根的乘积是 $\frac{1}{4}$，这与 $0.757068 \times 0.2140 \times 1.5431 \approx 0.250$ 吻合。
- 直接在 $y \in [-5, 5]$ 上作数值搜索，由第二条方程取 $x = \pm \operatorname{arcosh}(\frac{1}{2}\sinh 2y)$ 并检验第一条方程，结果只找到一个解，位于 $y \approx 0.7865$，且 $x > 0$。
- 若取负值 $\sinh y = -\sqrt{t}$，则 $\sinh y \cosh y < 0$，这绝不可能等于 $\cosh x$：这样便可迅速确认它确实无效。

常见错误

- 过早平方（例如把原来的两条方程都平方），之后却忘记舍去不合适的正负号。
- 两个迭代值一旦在六位小数上一致便停止迭代，而没有检查舍入区间两端的正负号变化。
- 先把 t 舍入至六位小数，然后才取平方根和对数。应保留额外的位数，只在最后才把 x 和 y 舍入。

STEP 之外

这里的两种迭代收敛的速度相差甚远。不动点迭代（fixed-point iteration）$t \mapsto g(t)$ 是线性收敛的，每一步误差大约缩小至原来的 $|g'(\text{根})|$ 倍；而牛顿–拉弗森迭代法则是二次收敛（quadratic convergence）的，每一步正确的位数大约增加一倍。要把这一点说得严谨，需要用到均值定理（mean value theorem）和泰勒定理（Taylor's theorem），而这正是数值分析（numerical analysis）的起点。至于背后的分析，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本实分析入门书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。