详细解答

STEP III 1993，第 6 题

纯数学 · 阿根图上的轨迹

> **STEP III 1993，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q6

关键思路

对圆而言，$|z-k|=r$ 是最自然的描述；利用 $|u|^2=uu^*$ 把它平方，便得到一条只含 z 和 z^*、不带平方根的方程。轨迹（locus）一旦写成这种形式，像 $w=z/(z-1)$ 这样的莫比乌斯映射（Möbius map）就很容易处理：先求逆，把 z 用 w 表示，然后代入、消去分母，再与一般形式比较，读出新的圆心和半径。

解答

圆的方程

P 在圆上，当且仅当它与 K 的距离为 r，即 $|z-k|=r$。两边平方，并利用 $|u|^2=uu^*$ 及 $(z-k)^*=z^*-k^*$，

$$r^2=(z-k)(z^*-k^*)=zz^*-kz^*-k^*z+kk^*,$$

所以 $zz^*-kz^*-k^*z+kk^*-r^2=0$，正是所求。

反过来，任何形如 $ww^*-cw^*-c^*w+cc^*-s^2=0$（其中 $s>0$）的方程都表示 $|w-c|^2=s^2$，所以它是圆心为 c、半径为 s 的圆。下文会用这一点来辨认圆。

P 的轨迹

以 OA 为直径的圆，圆心为 i（即 0 与 $2i$ 的中点），半径为 1。取 $k=i$、$k^*=-i$、$kk^*=1$ 及 $r=1$，由第一部分得

$$zz^*+iz-iz^*=0. \qquad (*)$$

Q_1 的轨迹 L

留意 $z = 1$ 不在圆上（它与 i 的距离是 $\sqrt{2}$），所以对每一点 P，$w_1 = z/(z-1)$ 都有定义。把 w_1 记作 w。从 $w(z-1) = z$ 解出 z，得

$$z = \frac{w}{w-1}, \qquad z^* = \frac{w^*}{w^*-1},$$

而且 $w \neq 1$，因为 $w = 1$ 就要求 $z = z - 1$。代入 $(*)$：

$$\frac{ww^*}{(w-1)(w^*-1)} + \frac{iw}{w-1} - \frac{iw^*}{w^*-1} = 0.$$

各项乘以 $(w-1)(w^*-1)$（它不等于零），

$$\begin{aligned} 0 &= ww^* + iw(w^*-1) - iw^*(w-1) \\ &= ww^* + iww^* - iw - iww^* + iw^* \\ &= ww^* - iw + iw^*. \end{aligned}$$

所以 L 的方程是

$$w_1 w_1^* - iw_1 + iw_1^* = 0.$$

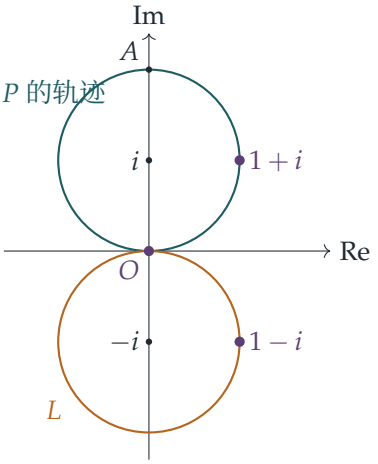
要辨认它，可与一般形式比较：我们需要 $-k^* = -i$ 及 $-k = i$，所以 $k = -i$；于是 $kk^* = 1$，而常数项 $kk^* - r^2$ 等于 0，所以 $r = 1$。因此 L 是圆心为 $-i$、半径为 1 的圆，即 $|w_1 + i| = 1$。它是 P 所在的圆对实轴（real axis）的反射，而且同样通过原点。

> **想一想** 这个圆上的每一点是否真的都能取到，还是只取到其中一部分?

以上每一步都可以逆推。若 $w \neq 1$ 在 $|w + i| = 1$ 上，则 $z = w/(w-1)$ 满足 $(*)$，所以它是圆上的一点 P，并且 $w_1 = w$。唯一可能取不到的点是 $w = 1$，但它不在 L 上，因为 $|1 + i| = \sqrt{2}$。所以轨迹是整个圆。

Q_2 的轨迹

对 $|z - i| = 1$ 取共轭（conjugate），得 $|z^* + i| = 1$，因为 $|u^*| = |u|$ 而 $(z-i)^* = z^* + i$。所以 $w_2 = z^*$ 满足 $|w_2 + i| = 1$。当 z 走遍以 i 为圆心的整个圆时，z^* 走遍以 $-i$ 为圆心的整个圆。换个说法，对 $(*)$ 取共轭得 $z^*z - iz^* + iz = 0$，这正是以 $w = z^*$ 代入的 L 的方程。所以 Q_2 的轨迹也是 L。



Q_1 与 Q_2 何时重合

我们需要 $\dfrac{z}{z-1} = z^*$，即

$$z = zz^* - z^*.$$

在圆上，由 $(*)$ 得 $zz^* = iz^* - iz$。代入，

$$z = iz^* - iz - z^* \quad \Longrightarrow \quad (1+i)z = (i-1)z^*.$$

其中一个解是 $z = 0$。否则 $z^* \neq 0$，而

$$\frac{z}{z^*} = \frac{i-1}{1+i} = \frac{(i-1)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i.$$

设 $z = \rho e^{i\theta}$，其中 $\rho > 0$，上式即 $e^{2i\theta} = i$，所以 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}$：P 在直线 $y = x$ 上。这条直线与圆 $x^2 + (y-1)^2 = 1$（即 $x^2 + y^2 = 2y$）相交于 $2x^2 = 2x$ 之处，即 $x = 0$ 或 $x = 1$。非零的那一点是 $z = 1 + i$。

逐一验证：$z = 0$ 给出 $w_1 = 0 = z^*$；而 $z = 1 + i$ 给出

$$w_1 = \frac{1+i}{i} = 1 - i = z^*.$$

所以 Q_1 与 Q_2 重合，当且仅当 P 是原点或点 $1 + i$。这正是 $y = x$ 与圆相交的两点，而 $Q_1 = Q_2$ 的共同位置是 0 和 $1 - i$。

验算

- 取一个样本点：$P = 2i$（即点 A）给出 $w_1 = \frac{2i}{2i-1} = \frac{4-2i}{5}$，而 $|w_1 + i| = \left|\frac{4+3i}{5}\right| = 1$，所以它在 L 上。

- 数值上,我们在 $|z-i|=1$ 上随机取了 10^4 个点,确认 $z/(z-1)$ 和 z^* 都满足 $|w+i|=1$,误差在 10^{-9} 以内。再沿圆周扫描 2×10^5 个点，寻找满足 $\left|z/(z-1)-z^*\right|<10^{-3}$ 的点，结果只找到 $z=0$ 和 $z=1+i$。

常见错误

- 没有先把 $z=0$ 分开处理就除以 z^*，因而漏掉 $P=O$ 这个解。
- 得出 $z/z^*=i$ 便就此停笔：这只确定了 P 的方向，你还要求出该直线与圆的交点。
- 把 $ww^*-iw+iw^*=0$ 与一般形式对照时，弄错 k 的正负号。w^* 的系数是 $-k$，所以 $k=-i$，而不是 i。

STEP 之外

映射 $z\mapsto z/(z-1)$ 是一个莫比乌斯变换（Möbius transformation），这类映射总是把圆和直线映到圆和直线。这里的像圆恰好是原来那个圆的镜像，所以取共轭会得出同一个轨迹。取共轭本身会把定向（orientation）反转，所以它不是莫比乌斯变换；但把它与莫比乌斯映射复合，便得到“反莫比乌斯”（anti-Möbius）映射，当中包括对圆的反射。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）以优美的几何手法讲解莫比乌斯映射、反演（inversion）和保圆性质。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。