详细解答

STEP III 1993，第 4 题

纯数学 · 级数求和

STEP III 1993，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q4

关键思路

每个级数（series）其实都是我们熟悉的级数，只是换了个样子。求级数之和的惯常做法，是认出它是某个标准展开式（对数、等比级数（geometric series）或其导数（derivative））在某一点的取值，又或者把通项拆开，使各项在求和时逐项相消（telescope）。因此在每一部分，我们都要问：它可能是哪一个标准级数？要乘上甚么、怎样求导或怎样重排，才能把它化成那个形式？

解答

第 (i) 部分

奇数分母 $1,3,5,\ldots$ 令人想到只剩下奇次幂的对数级数。当 $|x|<1$ 时，

$$\ln(1+x)=x-\tfrac{x^2}{2}+\tfrac{x^3}{3}-\cdots,\qquad \ln(1-x)=-x-\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{x^3}{3}-\cdots,$$

两式相减便消去偶次幂：

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

题目的级数是 $\sum x^{2n}/(2n+1)$，其中 $x=\frac{1}{2}$。这里的幂是偶数次，所以我们除以 x（因为 $x\neq 0$，这样做是容许的）：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

当 $x = \frac{1}{2}$ 时，此点位于收敛区间（interval of convergence）之内，$\frac{1+x}{1-x} = \frac{3/2}{1/2} = 3$ 而 $\frac{1}{2x} = 1$，所以

$$1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots = \ln 3.$$

第 (ii) 部分

系数以 4 为周期重复：$x^{4k}, x^{4k+1}, x^{4k+2}, x^{4k+3}$ 的系数分别是 $2, -1, 0, -1$。于是我们把每四项归为一组：

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{4k}\left(2 - x - x^3\right) = \frac{2 - x - x^3}{1 - x^4},$$

这是公比为 x^4 的等比级数，由于 $|x^4| < 1$，它是收敛的。这样分组是合理的，因为原来的级数在 $|x| < 1$ 时绝对收敛（converges absolutely）：它各项的绝对值不超过 $2|x|^m$。

现在化简。分子在 $x = 1$ 时等于零，所以 $1 - x$ 是它的因式：

$$2 - x - x^3 = (1 - x)(x^2 + x + 2), \qquad 1 - x^4 = (1 - x)(1 + x)(1 + x^2).$$

约去 $1 - x$（因为 $|x| < 1$，它不等于零），

$$\frac{x^2 + x + 2}{(1 + x)(1 + x^2)} = \frac{A}{1 + x} + \frac{Bx + C}{1 + x^2}.$$

代入 $x = -1$ 得 $2 = 2A$，所以 $A = 1$。于是 $x^2 + x + 2 - (1 + x^2) = x + 1 = (Bx + C)(1 + x)$，所以 $B = 0$ 及 $C = 1$。因此

$$2 - x - x^3 + 2x^4 - \cdots = \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 + x^2}.$$

这个结果很容易验证：$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$ 加上 $1 - x^2 + x^4 - \cdots$，所得的系数正是 $2, -1, 0, -1, 2, \ldots$，符合要求。

第 (iii) 部分

把通项写成

$$\frac{r\,2^{r-2}}{3^{r-1}} = \frac{1}{2}\,r\left(\frac{2}{3}\right)^{r-1}.$$

想一想 我们以前在哪里见过 $\sum r y^{r-1}$?

它是等比级数的导数。当 $|y| < 1$ 时，把 $\sum_{r=0}^{\infty} y^r = \frac{1}{1-y}$ 逐项求导（在收敛区间之内这样做是成立的），得

$$\sum_{r=1}^{\infty} r y^{r-1} = \frac{1}{(1 - y)^2}.$$

取 $y=\frac{2}{3}$，其值为 $\frac{1}{(1/3)^2}=9$。我们的和由 $r=2$ 开始，所以要减去 $r=1$ 的一项，即 1：

$$\sum_{r=2}^{\infty}\frac{r\,2^{r-2}}{3^{r-1}}=\frac{1}{2}(9-1)=4.$$

第 (iv) 部分

由于 $r(r^2-1)=(r-1)r(r+1)$ 是三个连续整数之积，我们尝试把它写成两个相邻的“成对”分数之差：

$$\frac{1}{(r-1)r}-\frac{1}{r(r+1)}=\frac{(r+1)-(r-1)}{(r-1)r(r+1)}=\frac{2}{r(r^2-1)}.$$

因此求和时各项逐项相消。由 $r=2$ 加至 N，除了首尾两项之外，其余各项全部抵消：

$$\sum_{r=2}^{N}\frac{2}{r(r^2-1)}=\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{N(N+1)}.$$

当 $N\to\infty$ 时，最后一项趋向 0，所以

$$\sum_{r=2}^{\infty}\frac{2}{r(r^2-1)}=\frac{1}{2}.$$

验算

- (i)：首四项之和为 $1+0.0833+0.0125+0.0022\approx 1.098$，已经很接近 $\ln 3\approx 1.0986$。
- (ii)：当 $x=0$ 时，两边都等于 2。当 $x=\frac{1}{2}$ 时，闭合形式（closed form）给出 $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{22}{15}$，与部分和（partial sums）的数值吻合。
- (iii)：最初几项是 $\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{16}{27},\ldots$；部分和缓缓上升，趋向 4。
- (iv)：加至 $N=4$ 的部分和是 $\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}=\frac{9}{20}=\frac{1}{2}-\frac{1}{20}$，与公式吻合。

常见错误

- 在 (i) 中忘记除以 x：$\sum x^{2n+1}/(2n+1)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 的值是 $\frac{1}{2}\ln 3$，而不是 $\ln 3$。
- 在 (iii) 中由 $r=1$ 开始求和，却忘记减去原本没有的第一项，结果得出 $\frac{9}{2}$。
- 在 (iv) 中误用 $\frac{1}{r-1}-\frac{1}{r+1}$ 来相消：这样拆开的是 $\frac{2}{r^2-1}$，而不是 $\frac{2}{r(r^2-1)}$。

STEP 之外

我们刚才不假思索便做了的几步（在 (ii) 中把各项重新分组，以及在 (iii) 中把幂级数（power series）逐项求导），正是大学第一门分析（analysis）课程要严格论证的内容。幂

级数在其收敛半径（radius of convergence）之内绝对收敛，并且可以逐项求导；但若一个级数只是条件收敛（converges conditionally），重排它的各项便可能改变它的和（黎曼（Riemann）重排定理）。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对这两点都有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。