详细解答

STEP III 1993，第 3 题

纯数学 · 矩阵的 LU 分解

STEP III 1993，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q3

关键思路

把 $\mathbf{M}$ 写成一个下三角矩阵（lower-triangular matrix）乘以一个上三角矩阵（upper-triangular matrix）（即 *LU 分解*（LU decomposition）），整个问题就化为一连串只含一个未知数的方程。把 $\mathbf{AB}$ 乘开，再按合理的次序逐项对照：这样每条新方程都只含一个未知数，既求出各个数值，也同时得出它们的唯一性（uniqueness）。三角矩阵的逆矩阵（inverse）亦容易求出，而 $\mathbf{Mx} = \mathbf{v}$ 则可拆成两个容易求解的三角方程组。

先提一个警告。试卷上印的是 $e = 1$，但这是印刷错误：正确的值是 $e = -1$。若 $e = 1$，$\mathbf{AB}$ 最底一行就会是 $(3, 10, 1)$，而不是 $(3, 8, 7)$。以下一律采用 $e = -1$。

解答

求 A 和 B

乘开后得

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a & ap & aq \\ b & bp + c & bq + cr \\ d & dp + e & dq + er + f \end{pmatrix}.$$

令上式等于 $\mathbf{M}$，并按以下次序逐一处理各元素，使每条方程都只剩下一个未知数。

- 元素 $(1,1)$：$a = 1$。
- 元素 $(1,2)$、$(1,3)$：$ap = 3$ 及 $aq = 2$，所以 $p = 3$，$q = 2$（因为 $a = 1$）。
- 元素 $(2,1)$、$(3,1)$：$b = 4$，$d = 3$。
- 元素 $(2,2)$：$bp + c = 13$，所以 $c = 13 - 12 = 1$。

- 元素 $(2,3)$：$bq + cr = 5$，所以 $8 + r = 5$，得 $r = -3$（用到 $c = 1$）。
- 元素 $(3,2)$：$dp + e = 8$，所以 $9 + e = 8$，得 $e = -1$。
- 元素 $(3,3)$：$dq + er + f = 7$，所以 $6 + 3 + f = 7$，得 $f = -2$。

每个未知数都是由一条其余各量均已知的方程迫出来的，而过程中只曾除以 $a = 1$ 和 $c = 1$，两者皆不为零。因此，若 $\mathbf{M} = \mathbf{AB}$，各未知数就必须取这些值。反过来，这些值确实满足全部九条方程。所以解存在而且唯一：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

其中 $a = 1$，$b = 4$，$c = 1$，$d = 3$，$e = -1$，$f = -2$，$p = 3$，$q = 2$，$r = -3$。

? **想一想** 唯一性从何而来？我们只是找到了一个解而已。

唯一性来自推导的次序。整个过程中没有任何一步需要作出选择。每条方程都是关于单一个新未知数的线性方程，而且系数不为零，所以恰好只有一个解。因此，任何符合题目所给形式并满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{M}$ 的 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$，都必定是上面那一对。（$\mathbf{B}$ 对角线上的 1 十分重要：没有它们，我们就可以把 $\mathbf{A}$ 放大、同时把 $\mathbf{B}$ 缩小。）

逆矩阵

要求 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵，我们由上而下解 $\mathbf{Au} = \mathbf{v}$：

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1, \\ u_2 &= v_2 - 4u_1 = -4v_1 + v_2, \\ -2u_3 &= v_3 - 3u_1 + u_2 = -7v_1 + v_2 + v_3 \implies u_3 = \tfrac{1}{2}(7v_1 - v_2 - v_3). \end{aligned}$$

要求 $\mathbf{B}$ 的逆矩阵，我们由下而上解 $\mathbf{Bw} = \mathbf{u}$：

$$\begin{aligned} w_3 &= u_3, \\ w_2 &= u_2 + 3w_3 = u_2 + 3u_3, \\ w_1 &= u_1 - 3w_2 - 2w_3 = u_1 - 3u_2 - 11u_3. \end{aligned}$$

读出各系数，得

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

乘开即可确认 $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ 及 $\mathbf{BB}^{-1} = \mathbf{I}$。留意下（上）三角矩阵的逆矩阵仍然是下（上）三角矩阵。

联立方程

这组联立方程（simultaneous equations）就是 $\mathbf{Mx} = \mathbf{v}$，其中 $\mathbf{x} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{v} = (7, 18, 25)^{\mathrm{T}}$。由于 $\mathbf{M} = \mathbf{AB}$，

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}.$$

注意次序：$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$。首先，

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -28 + 18 \\ \frac{1}{2}(49 - 18 - 25) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix},$$

然后

$$\mathbf{x} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 7 + 30 - 33 \\ -10 + 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

所以唯一解是

$$x = 4, \qquad y = -1, \qquad z = 3.$$

解之所以唯一，是因为 $\mathbf{M}$ 可逆（invertible）：$\det \mathbf{M} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} = (1 \cdot 1 \cdot (-2))(1) = -2 \neq 0$。

验算

代回原式：$4 - 3 + 6 = 7$，$16 - 13 + 15 = 18$，$12 - 8 + 21 = 25$。三条方程全部成立。我们亦以精确分数验证了 $\mathbf{AB} = \mathbf{M}$，以及 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ 确实是 $\mathbf{M}^{-1}$；它最底一行是 $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$。若采用试卷所印的 $e = 1$，乘积 $\mathbf{AB}$ 最底一行是 $(3, 10, 1)$，由此可确认那是印刷错误。

常见错误

- 相信试卷所印的 $e = 1$，然后硬要 $(3, 2)$ 和 $(3, 3)$ 两个元素吻合。务必把你求得的 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 重新相乘核对。
- 用了 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ 而不是 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$。
- 只证明了这些值可行，却没有论证不可能有其他值。

STEP 之外

这就是 *LU 分解*，也是电脑实际求解线性方程组（linear systems）的方法。高斯消去法（Gaussian elimination）其实就是作出分解 $\mathbf{M} = \mathbf{LU}$ 的过程。分解完成后，每换一个新的

右方向量，只需做一次前向代入（forward substitution）和一次回代（back substitution），毋须重新消元。一般而言，可能要先作行交换（row swap），这样得到的是 $\mathbf{PM} = \mathbf{LU}$。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 用了一整章围绕这个想法展开。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。