详细解答

STEP III 1993，第 2 题

纯数学 · 拐点与极坐标面积

STEP III 1993，第 2 题

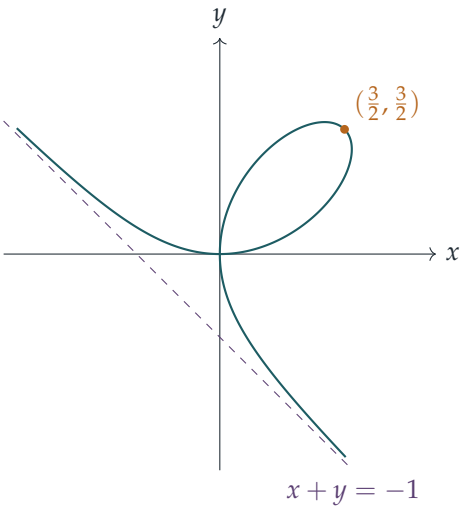
继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q2

关键思路

在拐点（point of inflection）处，二阶导数必须为零（并且变号），所以 (i) 的计划是用隐函数微分法（implicit differentiation）求出 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，再看它何时可以为零。代数运算看似繁重，但曲线本身的方程会把分子化简成非常简洁的式子。至于 (ii)，三次项与 xy 项的次数不同，所以改用极坐标（polar coordinates）后可以约去因子 r^2，而 r 就成为 θ 的显函数。

解答



草图显示了这条曲线（笛卡儿叶形线，folium of Descartes）：第一象限内有一个环圈，第

二和第四象限内各有一条分支趋近渐近线（asymptote）$x+y=-1$。

第 (i) 部分

把 $x^3+y^3=3xy$ 对 x 作隐函数微分，

$$3x^2+3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3y+3x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\qquad \text{所以}\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{N}{D},\quad N=y-x^2,\ D=y^2-x,$$

只要 $D\neq 0$ 即成立。对这个商求导，并利用 $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}=y'-2x$ 和 $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}=2yy'-1$，其中 $y'=N/D$，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{(y'-2x)D-N(2yy'-1)}{D^2}=\frac{(N-2xD)-(2yN^2/D-N)}{D^2}\\&=\frac{2(ND-xD^2-yN^2)}{D^3}.\end{aligned}$$

现在把括号展开：

$$\begin{aligned}ND&=x^3+y^3-x^2y^2-xy,\\xD^2&=xy^4-2x^2y^2+x^3,\\yN^2&=y^3-2x^2y^2+x^4y,\end{aligned}$$

所以

$$ND-xD^2-yN^2=3x^2y^2-xy-xy^4-x^4y=-xy\,(1+x^3+y^3-3xy).$$

在 C 上有 $x^3+y^3-3xy=0$，所以括号内的值就是 1，于是

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-2xy}{(y^2-x)^3}.$$

? **想一想** 这个式子在哪里可能为零？公式失效的那些点又如何处理？

二阶导数只有在 $x=0$ 或 $y=0$ 时才为零。在 C 上，$x=0$ 迫使 $y^3=0$，而 $y=0$ 迫使 $x^3=0$；无论哪种情况，我们都身处原点，而我们可以假设原点不是拐点。在原点和满足 $y^2=x$ 的点以外，二阶导数连续而且不为零，所以它不可能变号：这些地方没有拐点。

余下的是满足 $D=y^2-x=0$ 的点，在这些点上 y 不是 x 的可微函数。假如 N 在那里也是零，我们就有 $x=y^2$ 和 $y=x^2$，所以 $x=x^4$，得出 $(0,0)$ 或 $(1,1)$；但 $(1,1)$ 不在 C 上，因为 $1+1\neq 3$。因此在原点以外的每一个这样的点上都有 $N\neq 0$：切线是铅垂的，我们应该把 x 看成 y 的函数。C 的方程对 x 和 y 是对称的，所以把上面运算中两个字母的角色互换，便得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{-2xy}{(x^2-y)^3},$$

这个式子有定义（因为 $x^2 - y = -N \neq 0$），而且不为零（因为在原点以外 $xy \neq 0$）。所以曲线在这些点上同样不会改变弯曲的方向。

因此 C 没有拐点。

第 (ii) 部分

设 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$。那么

$$r^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta) = 3r^2\cos\theta\sin\theta,$$

而当 $r \neq 0$ 时，我们可以除以 r^2：

$$r = \frac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}.$$

当 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时，分子和分母都非负（而且分母为正），所以 $r \geq 0$，并且恰好在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时 $r = 0$。因此当 θ 由 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，该点绕环圈走了一周，起点和终点都是原点。面积是

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta\sin^2\theta}{(\cos^3\theta + \sin^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

把分子和分母同时除以 $\cos^6\theta$（当 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ 时为正），

$$A = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{(1 + \tan^3\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

代入 $u = \tan\theta$，$\mathrm{d}u = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，其中 u 由 0 变到 ∞，

$$A = \frac{9}{2}\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(1+u^3)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{9}{2}\left[-\frac{1}{3(1+u^3)}\right]_0^{\infty} = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{2}.$$

这个广义积分（improper integral）收敛，因为当 $u \to \infty$ 时原函数（antiderivative）趋向 0。所以环圈的面积是 $\frac{3}{2}$。

验算

- 环圈的顶端位于 $y = x$ 之处：由 $2x^3 = 3x^2$ 得 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$，与原点的距离为 $\frac{3}{\sqrt{2}} \approx 2.12$。一个长度如此、阔度约为 1 的环圈，面积应该在 1 至 2 之间，与结果吻合。
- 利用参数式（parametrisation）$x = \frac{3t}{1+t^3}$，$y = \frac{3t^2}{1+t^3}$（直线 $y = tx$ 与 C 相交于该点），我们在随机选取的点上比较了 $\frac{-2xy}{(y^2-x)^3}$ 与由参数式求得的二阶导数，并检查了曲率（curvature）在任何一条分支上都不变号。
- 对 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 用中点法则作数值积分，以及沿参数化的环圈用鞋带公式（shoelace formula）求和，两者都得出 1.500000。

常见错误

- 把二阶导数完全展开，却始终没有留意到 $x^3 + y^3 - 3xy$ 就藏在其中；这一步化简正是全题的关键。
- 忘记了切线铅垂的那些点，在那里 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 是没有定义，而不是等于零。
- 计算面积时把 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 误写成 $\frac{1}{2}\int r\,\mathrm{d}\theta$。

STEP 之外

隐函数微分法的依据是隐函数定理（implicit function theorem）：在任何满足 $\partial F/\partial y \neq 0$ 的点附近，方程 $F(x,y)=0$ 确实把 y 定义为 x 的光滑函数。在原点，两个偏导数（partial derivative）都为零，那是一个奇点（singular point），有两条分支在该处相交，这就是它需要特别处理的原因。叶形线也是一条有理曲线（rational curve），可以用通过其二重点（double point）的直线 $y = tx$ 来参数化，这个想法通向代数几何（algebraic geometry）。至于这一切背后的分析学，可参阅 Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。