详细解答

STEP III 1993，第 14 题

力学 · 铅垂圆周运动

STEP III 1993，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

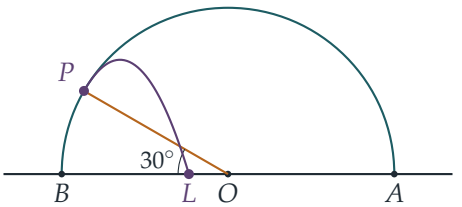
step.maths.org/questions/93-s3-q14

关键思路

由于绳子水平，而质点（particle）沿铅垂方向抛出，初速度与绳子垂直，所以质点会在以 O 为圆心、半径为 c 的铅垂圆上运动，并落在与 A 位于同一直径另一端的点 B。每次碰撞时速度都是铅垂的，所以碰撞只是把速率减半。我们要找出质点在第几次反弹后首次无法越过圆的顶点，然后利用能量和径向方程（radial equation）求出张力（tension）变为零的位置。此后质点便是普通的抛体（projectile）。

解答

我们把质点看成质量为 m 的质点，绳子为轻而不可伸长（light and inextensible），桌面为光滑（smooth）且水平。取 O 为原点，并设 $A=(c,0)$ 及 $B=(-c,0)$。无论质点在哪一侧上升，设它位于该侧水平半径之上、夹角为 θ 的位置。



两次碰撞之间的运动

假设质点在 A 或 B 离开桌面，以速率 V 铅垂向上运动。它的速度与拉紧的绳子垂直，所以只要绳子保持拉紧，它便在以 O 为圆心、半径为 c 的圆上运动。根据能量守恒（conservation

of energy)，在角度 θ 时，它的速率 v 满足

$$v^2 = V^2 - 2gc\sin\theta.$$

沿指向 O 的方向分解，设张力为 T，

$$T + mg\sin\theta = \frac{mv^2}{c} \quad\Longrightarrow\quad \frac{T}{m} = \frac{V^2}{c} - 3g\sin\theta.$$

当 $0 \le \theta \le 90^\circ$ 时，张力在顶点最小，所以绳子在整个半圆上保持拉紧，当且仅当 $V^2 \ge 3gc$。（过了顶点之后，$\sin\theta$ 再次减小，所以 T 只会增大。）在这情况下，质点会落到直径另一端的桌面上，而根据能量守恒，它此时铅垂向下运动，速率同样是 V。

在该次碰撞中，速度与桌面垂直，所以反弹方向是铅垂的，速率为 $\frac{1}{2}V$，而绳子仍然水平并且拉紧。因此整个过程会重复一次，只是 V 减半。

绳子在哪里变松

质点起初的速率为 $V_0 = 64\sqrt{6gc}$，所以 $V_0^2 = 24576\,gc$。经过 k 次碰撞后，速率为 $V_k = V_0/2^k$，所以

$$V_k^2 = \frac{24576}{4^k}\,gc: \qquad V_6^2 = 6gc, \qquad V_7^2 = \tfrac{3}{2}gc.$$

因此，以速率 $V_0, \dots, V_6$ 开始的各个半圆全部都能走完（每个都有 $V_k^2 \ge 3gc$），碰撞依次发生在 B, A, B, A, B, A, B。第七次碰撞在 B，而质点从 B 上升时 $V_7^2 = \frac{3}{2}gc < 3gc$。

> ? **想一想** 质点会不会在绳子变松之前就已经往回落，而不是绳子先变松?

不会。速率会在 $V_7^2 = 2gc\sin\theta$ 处变为零，即 $\sin\theta = \frac{3}{4}$，但张力更早便变为零，位置满足

$$\frac{V_7^2}{c} = 3g\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{3}{2}gc = 3gc\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \sin\theta = \tfrac{1}{2}.$$

所以绳子在 $\theta = 30^\circ$ 时变松，位置是 B 那一侧的点 P，离桌面的高度为 $c\sin\theta = c/2$，正如题目所求。

A 与 B 之间的第一次反弹

在 P 点有 $\theta = 30^\circ$，所以 $P = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c,\ \frac{1}{2}c\right)$，并且

$$v^2 = \tfrac{3}{2}gc - 2gc\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}gc.$$

速度沿切线方向，与 OP 垂直，指向上方并朝向 O 的一边；它与水平方向成 60° 角。所以它的分量为

$$v_x = \tfrac{1}{2}v, \qquad v_y = \tfrac{\sqrt{3}}{2}v, \qquad \text{其中} v_x^2 = \tfrac{1}{8}gc, \quad v_y^2 = \tfrac{3}{8}gc.$$

从这时起，质点就是一个抛体。当 $\frac{1}{2}c + v_y t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$ 时它到达桌面；取正根，

$$t = \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + gc}}{g} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{c}{g}}.$$

在这段时间内，它的水平位移为

$$v_x t = \sqrt{\frac{gc}{8}} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{c}{g}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{8}\,c,$$

所以它落在点 L，其中

$$x_L = -\frac{\sqrt{3}}{2}c + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{11}}{8}c = \frac{\sqrt{11}-3\sqrt{3}}{8}\,c \approx -0.235\,c.$$

（在整段飞行过程中，质点与 O 的距离始终不超过 c，所以绳子在到达 L 之前不会再次拉紧；特别地，$|x_L| < c$。）

由于 $\sqrt{11} < \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$，我们有 $x_L < 0$：落点与 B 位于 O 的同一侧。因为 O 是 AB 的中点，所以 A 与 B 之间的第一次反弹**较接近** B，与 B 相距约 $0.77c$，与 A 相距约 $1.23c$。

验算

- 以 $V_k^2 \geq 3gc$ 作检验，可知 $k = 7$ 是第一个走不完的半圆，而 $V_7^2 = \frac{3}{2}gc$；绳子变松的条件给出 $\sin\theta = \frac{1}{2}$。
- 在 P 点，重力的径向分量 $g\sin 30^\circ = \frac{1}{2}g$ 等于 $v^2/c = \frac{1}{2}g$，正好符合张力为零的要求。
- 逐步进行的数值模拟（取 $g = 9.8$，$c = 1.3$）显示，绳子在高度 $0.5000c$ 处变松，落点在 $x \approx -0.2349c$，而飞行期间质点与 O 的距离从未超过 c。

常见错误

- 以 $V^2 \geq 4gc$（刚好到达顶点）作为走完半圆的条件。绳子与杆不同，需要 $V^2 \geq 3gc$。
- 弄不清第七次碰撞发生在哪一端：第奇数次碰撞都在 B。
- 把 P 点速度的方向弄错：它与 OP 垂直，与水平方向成 60° 角，而不是 30°。

STEP 之外

绳子变松的一刻，就是一个约束（constraint）停止作用的一刻：张力正是用来维持 $|OP| = c$ 的拉格朗日乘数（Lagrange multiplier），当它必须变为负数才能维持约束时，这个约束便不再起作用。像这样带有单边约束（one-sided constraint）以及碰撞的问题，在大学本科的

力学课程中会有系统地处理。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）是个好去处，可以看到能量与径向方程怎样这样配合使用。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。