详细解答

STEP III 1993，第 13 题

力学 · 变质量链条

STEP III 1993，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q13

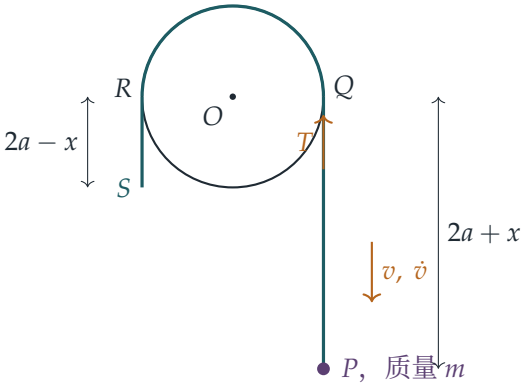
关键思路

由于链条不能滑动，圆盘、整条链条和质点都以相同的速率运动：未知量只有一个，就是 v。于是动能（kinetic energy）为 $\frac{1}{2}$(等效质量)v^2。在势能（potential energy）方面，只有两段悬垂部分会改变，因为绕过顶部的那段弧只是不断被完全相同的链条取代。至于张力（tension），可考虑运动中的 PQ 段连同质点。然后仔细想想：在 Q 处加入这一段的链条，本身已经以多快的速率运动。

解答

模型

圆盘是均匀薄片（uniform lamina），绕通过 O 的光滑固定轴转动，其转动惯量（moment of inertia）为 $\frac{1}{2}(4m)a^2 = 2ma^2$。链条是均匀的，每单位长度的质量为 m/a，不可伸长，并且不会在盘边上滑动。质点视为点质量。当 P 下降了 x 时，右边的一段 QP 长度为 $2a + x$，左边的一段 RS 长度为 $2a - x$，而弧 RQ 是长度为 πa 的半圆。链条上每一点都以速率 v 运动，由于没有滑动，盘边亦然，所以圆盘的角速率（angular speed）为 $\omega = v/a$。



速率

动能。圆盘的贡献为 $\frac{1}{2}(2ma^2)(v/a)^2 = mv^2$，链条为 $\frac{1}{2}(4+\pi)mv^2$，质点为 $\frac{1}{2}mv^2$。所以

$$\text{动能} = \tfrac{1}{2}mv^2(2+4+\pi+1) = \tfrac{1}{2}(\pi+7)mv^2.$$

势能。弧 RQ 始终是同样的一段半圆形链条，所以它的势能永不改变。取 O 的水平为零势能面。一段长度为 ℓ、悬垂在该水平之下的链条，质量为 $m\ell/a$，其质心（centre of mass）位于深度 $\frac{1}{2}\ell$ 处，所以它的势能为 $-\dfrac{mg\ell^2}{2a}$。因此，两段悬垂部分的势能损失为

$$\frac{mg}{2a}\left[(2a+x)^2+(2a-x)^2-(2a)^2-(2a)^2\right] = \frac{mg}{2a}\cdot 2x^2 = \frac{mgx^2}{a}.$$

质点则损失 mgx。

能量。轴是光滑的，而粗糙接触面不作功，因为没有滑动。所以能量守恒，而由静止开始，

$$\tfrac{1}{2}(\pi+7)mv^2 = \frac{mgx^2}{a} + mgx \quad\Longrightarrow\quad (\pi+7)av^2 = 2g(x^2+ax),$$

正如所求。

加速度

对时间求导，并利用 $\dot{x} = v$：

$$2(\pi+7)av\dot{v} = 2g(2x+a)v \quad\Longrightarrow\quad \dot{v} = \frac{g(2x+a)}{(\pi+7)a} \qquad (v \neq 0).$$

当 $x = 2a$ 时，S 到达 R，这时

$$\dot{v} = \frac{5g}{\pi+7}, \qquad v^2 = \frac{2g(4a^2+2a^2)}{(\pi+7)a} = \frac{12ga}{\pi+7}.$$

Q 处的张力

设 T 为 Q 处的张力。我们选取的系统是质点连同悬垂在 Q 之下的链条。它的质量为

$$M = \frac{m}{a}(2a + x) + m,$$

随着链条离开圆盘，这个质量以 $\dot{M} = \dfrac{m}{a}v$ 的速率增加。作用于它的外力是向下的重量 Mg 和向上的 T。整个系统都以速率 v 向下运动。

想一想 正要加入 PQ 的链条，在加入前的一刻运动得有多快?

在 Q 处，盘边是竖直的，所以到达该处的链条本身已经以速率 v 竖直向下运动。它把自己的动量（momentum）$v\,\delta M$ 一并带来。于是变质量方程（variable-mass equation）（动量的变化率 = 力 + 每单位时间带入的动量）为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = Mg - T + v\dot{M}, \qquad \text{即} \qquad M\dot{v} = Mg - T.$$

当 S 到达 R 时，$M = 5m$，所以

$$T = 5m\left(g - \frac{5g}{\pi + 7}\right) = \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}\,mg.$$

*用力矩覆核。*把圆盘和链条的弧 RQ 一并考虑。轴的作用力通过 O，弧的重量对 O 的总力矩（moment）为零（弧对通过 O 的竖直线对称），而链条与圆盘之间的摩擦力是内力。弧上每一个质点都在距离 O 为 a 之处以速率 v 运动。所以角动量（angular momentum）为 $(2ma^2 + \pi ma^2)(v/a)$，而

$$(T - T_R)a = (2 + \pi)ma\,\dot{v}.$$

当 S 到达 R 时，左边的一段已缩短至零，所以 $T_R = 0$。由此再次得出 $T = (2 + \pi)m \cdot \dfrac{5g}{\pi + 7} = \dfrac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg$。

*试卷印出的答案。*试卷给出的值 $\dfrac{5\pi - 2}{\pi + 7}mg$，正是写成 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = Mg - T$ 时所得的结果，这样写等于把加入 PQ 的链条当作是静止地到达：

$$T = M(g - \dot{v}) - \frac{m}{a}v^2 = \frac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg - \frac{12}{\pi + 7}mg = \frac{5\pi - 2}{\pi + 7}mg.$$

对于一颗雨点沿途吸收静止的雾气，这条方程是对的。但在这里并不正确，因为绕过盘边而来的链条本身已经随 PQ 一起运动。我们的两种方法都得出 $\dfrac{5(\pi + 2)}{\pi + 7}mg$，所以我们相信印出的答案包含了这个错误。如果你需要得出印出的数值，可使用“静止地加入”的方程，但要知道它把 T 少算了 mv^2/a。

验算

- 在 $x = 0$ 时，公式给出 $v = 0$ 和 $\dot{v} = g/(\pi + 7)$。不平衡的力只有质点的重量 mg，作用于等效质量 $(\pi + 7)m$ 之上。
- 由静止开始，以数值方法逐步求解运动方程 $(\pi + 7)m\dot{v} = mg(2x + a)/a$，可重现 $(\pi + 7)av^2 = 2g(x^2 + ax)$，误差在 10^{-11} 之内。取 $m = a = 1$ 和 $g = 9.81$，动量法和力矩法都给出 $T/mg \approx 2.5349 = 5(\pi + 2)/(\pi + 7)$。“静止地加入”的版本则给出 $1.3517 = (5\pi - 2)/(\pi + 7)$。
- $T < 5mg$，这是必然的，因为悬垂的质量 $5m$ 正在向下加速。

常见错误

- 忘记计算圆盘的动能，或者在计算其转动惯量时用了 ma^2 而不是 $\frac{1}{2}(4m)a^2$。
- 把链条的弧计入势能的变化之中。它的形状和位置从不改变。
- 使用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Mv) = F$ 时，没有问清楚加入的质量本身已有甚么速度。

STEP 之外

变质量问题的真正重点，在于选定一个系统，并追踪越过其边界的动量。这就是控制体积（control volume）的概念，它是火箭运动和大部分流体力学（fluid mechanics）的基础。这里的常见错误，即假设 $F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)$ 对任何变化中的质量都成立，是一个著名的陷阱：一般而言，这条方程甚至会随参考系（frame of reference）而改变。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对变质量系统有严谨的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。