详细解答

# STEP III 1993，第 12 题

力学 · 弹性绳与能量

**STEP III 1993，第 12 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

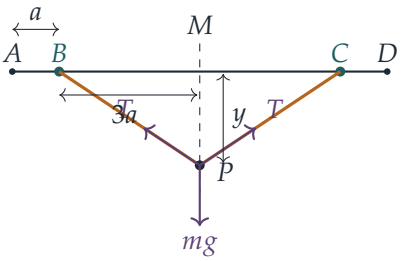
step.maths.org/questions/93-s3-q12

## 关键思路

由于钉子是光滑（smooth）的，而质点位于弦线的中点，弦线便分成两段完全相同的半段，每段的自然长度（natural length）均为 $a$，而且每一半段上各处的张力（tension）相同。每一半段都由一个固定端出发，绕过一枚钉子，再向下（或向上）连到 $P$，所以它拉伸后的长度只取决于距离 $BP$。只要把伸长量（extension）用 $P$ 的高度表示出来，平衡（equilibrium）条件便给出 $k$，而能量守恒（conservation of energy）则把 $Q$ 与 $R$ 联系起来。

## 解答

我们把 $P$ 看作质点（particle），把弦线看作轻而有弹性（light and elastic），并把钉子看作光滑。根据对称性，$P$ 沿着通过 $BC$ 中点 $M$ 的铅垂线运动。设 $y$ 为 $P$ 在 $M$ 之下的深度；当 $P$ 在 $BC$ 之上时，它是负数。



**求 $k$**

半段 $A \to B \to P$ 的长度为 $a + BP = a + \sqrt{9a^2 + y^2}$，自然长度为 $a$，所以它的伸长量是

$$x = \sqrt{9a^2 + y^2}.$$

根据胡克定律（Hooke's law），每一半段的张力为

$$T = \frac{kmg\,x}{a}.$$

若 $\theta$ 是 $BP$ 与水平线所成的角，则 $\sin\theta = |y|/x$。在 $P$ 点沿铅垂方向分解力，得

$$2T\sin\theta = mg \quad\Longrightarrow\quad 2\cdot\frac{kmg\,x}{a}\cdot\frac{y}{x} = mg \quad\Longrightarrow\quad \frac{2ky}{a} = 1.$$

平方根已经约去，所以那个难看的数值 $BP = \frac{\sqrt{145}}{4}a$ 根本用不着。代入 $y = a/4$，得 $k/2 = 1$，所以

$$k = 2.$$

**由 $Q$ 到 $R$ 的能量**

每一半段储存的弹性势能（elastic energy）为 $\dfrac{kmg\,x^2}{2a}$，所以当 $k = 2$ 时，两个半段合共储存

$$E(y) = 2\cdot\frac{2mg\,x^2}{2a} = \frac{2mg\,(9a^2 + y^2)}{a}.$$

? **想一想** 为甚么 $P$ 会在 $R$ 停下来？$P$ 最后升到钉子之上，为甚么没有问题？

$P$ 在 $Q$ 由静止释放，而 $R$ 是它升到的最高点，所以它在那里同样是瞬时静止的。在 $BC$ 之上，两个半段仍然处于拉伸状态（每段仍有 $x \geq 3a > 0$），所以 $E$ 的公式同样适用。弦线始终不会松弛。

在 $Q$，$y = pa$；在 $R$，$y = -3a$。质点上升了 $(p+3)a$。由于钉子光滑，又没有其他能量损失，而动能（kinetic energy）在两端均为零，所以

$$\begin{aligned} E(pa) &= E(-3a) + mg(p+3)a \\ 2mga(9+p^2) &= 2mga(9+9) + mga(p+3) \\ 18 + 2p^2 &= 36 + p + 3, \end{aligned}$$

由此得

$$2p^2 - p - 21 = 0, \qquad \text{即} \qquad (2p+6)(p-\tfrac{7}{2}) = 0.$$

由于 $p > 0$，我们得到 $p = \frac{7}{2}$。

这与题目印出的 $2p^2 - p - 17 = 0$ 并不吻合。我们已仔细核对过这个模型（见“验算”），包括直接进行数值模拟，而按题目所给的数据，得出的确实是 $-21$。$p = \frac{7}{2}$ 这个整齐的根显示，21 才是原意中的常数，17 应是误印。最后一部分并不取决于哪一个常数才正确。

要确认 $P$ 的确是在 $R$ 第一次停下来，可设 $y = ta$。在深度 $ta$ 处的动能为

$$E(pa) - E(ta) - mg(p-t)a = mga\,(p-t)(2p+2t-1).$$

当 $p = \frac{7}{2}$ 时，这就是 $mga\,(\frac{7}{2} - t)(2t+6)$。它在 $-3 < t < \frac{7}{2}$ 时为正，并在 $t = -3$ 时首次变为零，而这正是 $R$。

### 比较张力

张力为 $T = 2mg\,x/a$，它随 $x$ 增加而增加，所以我们需要证明 $x$ 在 $R$ 的值比在 $Q$ 的值小。能量方程毋须用到 $p$ 的值便可做到这一点：

$$E(Q) - E(R) = mg(p+3)a > 0.$$

弹性势能为 $\dfrac{2mg\,x^2}{a}$，所以 $x_R^2 < x_Q^2$，从而 $x_R < x_Q$，因此 $T_R < T_Q$。用文字来说，质点在上升途中获得了势能（potential energy），而这些能量只能来自弦线，所以弦线在 $R$ 的拉伸程度必定较小。

具体而言，当 $p = \frac{7}{2}$ 时，$x_Q = \frac{\sqrt{85}}{2}a$ 而 $x_R = 3\sqrt{2}\,a$，所以

$$T_Q = \sqrt{85}\,mg \approx 9.22\,mg, \qquad T_R = 6\sqrt{2}\,mg \approx 8.49\,mg.$$

## 验算

- 简谐运动验算。作用于 $P$ 的向上的力为 $2T \cdot \dfrac{y}{x} = \dfrac{4mg\,y}{a}$，它是 $y$ 的线性函数，在 $BC$ 之上和之下都是如此。所以 $P$ 围绕 $y = a/4$（即上面求得的平衡位置）作简谐运动（simple harmonic motion）。它在 $y = \frac{7}{2}a$ 由静止释放，振幅（amplitude）为 $\frac{13}{4}a$，所以它的最高点是 $y = \frac{1}{4}a - \frac{13}{4}a = -3a$。这正好就是 $R$，从而独立地确认了 $p = \frac{7}{2}$。
- 取 $a = 1$、$k = 2$、$p = 3.5$，对运动方程作数值积分，所得的最高点为 $y = -3.0000$。
- 题目印出的方程会给出 $p = \frac{1+\sqrt{137}}{4} \approx 3.18$，而这样能量收支便会相差 $4mga$。

## 常见错误

- 计算每一半段的长度时漏掉了 $AB$ 这一段。半段的长度是 $AB + BP = a + BP$，而它的伸长量之所以是 $BP$，只是因为 $AB$ 刚好等于它的自然长度 $a$。

- 把整条弦线当作一条弹簧，张力为 $kmg \cdot (\text{总伸长量})/(2a)$。这样做的确会得到相同的答案，但前提是伸长量必须取总伸长量 $2x$。
- 忘记了当 $P$ 在 $BC$ 之上时，弹性势能仍然存在。弦线在那里仍然处于拉伸状态。

## STEP 之外

尽管弦线的几何关系是非线性的，铅垂方向的回复力（restoring force）却恰好与位移成正比。这是因为，若张力与长度成正比，它的铅垂分量便与铅垂方向的距离成正比；自然长度为零的弹簧能成为理想的悬挂装置，也是出于同一个原因（这正是 LaCoste 长周期地震仪背后的原理）。势能若是坐标的二次函数，便会导出线性的运动方程，而这正是小振动（small oscillations）与简正模式（normal modes）理论的起点。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）正是以这种精神处理弹簧、能量和振动的。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。