详细解答

STEP III 1993，第 11 题

力学 · 力偶与转动惯量

STEP III 1993，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s3-q11

关键思路

在立方体上建立坐标，并把每个力写成向量（vector）。六个力之和为零，所以它们的作用只是施加一个力偶（couple），而力偶对任何一点的力矩（moment）都相同。第 (i) 部分讨论的就是这个力矩的方向。第 (ii) 部分只用到它沿 OO' 的分量，再配合转动惯量（moment of inertia）；我们会利用点到直线的距离，逐根杆把转动惯量计算出来。

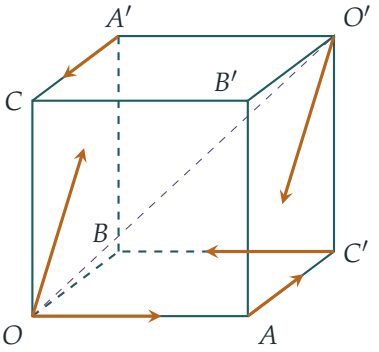
解答

我们把框架视为刚体（rigid body），由均匀细杆组成，并且不考虑重力。取 O 为原点，单位向量分别沿 OA、OB、OC，于是

$$A = (a,0,0), \quad B = (0,a,0), \quad C = (0,0,a),$$

而相对的顶点为

$$O' = (a,a,a), \quad A' = (0,a,a), \quad B' = (a,0,a), \quad C' = (a,a,0).$$



琥珀色箭头显示六条作用线，对角线 OO' 则以紫红色虚线表示。

第 (i) 部分

每个力等于它的大小乘以沿其作用线的单位向量。例如，$O'A$ 是向量 $(0,-a,-a)$，长度为 $\sqrt{2}\,a$，所以沿它作用的力 $\sqrt{2}\,mg$ 就是 $mg(0,-1,-1)$。对全部六个力作同样处理：

作用线	线上一点	力
OA	O	$mg(2,0,0)$
AC'	A	$mg(0,1,0)$
$O'A$	A	$mg(0,-1,-1)$
OA'	O	$mg(0,1,1)$
$C'B$	B	$mg(-2,0,0)$
$A'C$	C	$mg(0,-1,0)$

这些力之和为 $\mathbf{0}$。合力（resultant）为零的力系等价于一个力偶，而力偶对任何一点的力矩都相同。对 O 取力矩（沿 OA 和 OA' 的力通过 O，没有贡献）：

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= A\times mg(0,1,0)+A\times mg(0,-1,-1)+B\times mg(-2,0,0)+C\times mg(0,-1,0)\\ &= amg[(0,0,1)+(0,1,-1)+(0,0,2)+(1,0,0)]\\ &= amg\,(1,1,2).\end{aligned}$$

位于 O 的支点可以对框架施力，但这个力通过 O，所以对 O 没有力矩。因此，框架由静止开始，会绕着通过 O 并沿力偶轴线的直线转动，其方向为

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$

正如题目所求。

*给好奇读者的补充。*这是题目预期的答案，也是你应该写下的答案。不过严格来说，对一个可在三维空间自由转动的物体，角加速度（angular acceleration）是 $\mathbf{I}^{-1}\mathbf{G}$，其中 $\mathbf{I}$ 是对 O 的惯量张量（inertia tensor）。只有当 $\mathbf{G}$ 沿着主轴（principal axis）时，角加速度才会指向 $\mathbf{G}$ 的方向。就这个框架而言，对 O 来说，绕 OO' 的转动惯量是 $14ma^2/3$（见第 (ii) 部分），而绕每一条通过 O 并垂直于 OO' 的轴的转动惯量都是 $41ma^2/3$。由此得出初始转轴的方向为 $(25,25,32)$，与 $(1,1,2)$ 相差约 12.6°。

第 (ii) 部分

设 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ 为沿 OO' 的单位向量。由于 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{p}$ 沿该直线的分量，根据毕氏定理（Pythagoras' theorem），点 $\mathbf{p}$ 与直线 OO' 的距离的平方为

$$d^2 = |\mathbf{p}|^2 - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{u})^2$$

。

杆 OA。与 O 相距 x 的点是 $(x,0,0)$，所以 $d^2 = x^2 - \frac{x^2}{3} = \frac{2}{3}x^2$。长度为 $\mathrm{d}x$ 的小段，质量为 $\frac{m}{a}\,\mathrm{d}x$，所以

$$I_{OA} = \int_0^a \frac{m}{a}\cdot\frac{2x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{2ma^2}{9}.$$

中点 $(\frac{a}{2},0,0)$ 与 OO' 的距离的平方为 $\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{6}$。根据平行轴定理(parallel axis theorem)，绕通过中点的平行轴，

$$I_{\text{中点}} = \frac{2ma^2}{9} - m\cdot\frac{a^2}{6} = \frac{ma^2}{18}.$$

杆 $B'C$。这根杆由 $(a,0,a)$ 伸延至 $(0,0,a)$，所以与 OA 平行。它的长度也相同，与转轴所成的角度亦相同。因此，绕通过它自身中点的平行轴，它的转动惯量同样是 $ma^2/18$。它的中点为 $\mathbf{p} = (\frac{a}{2},0,a)$，而

$$d^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{2}.$$

根据平行轴定理，

$$I_{B'C} = \frac{ma^2}{18} + \frac{ma^2}{2} = \frac{5ma^2}{9}.$$

? **想一想** 我真的要对全部十二根杆逐一这样计算吗?

不用：对称性（symmetry）会替我们完成。绕 OO' 旋转 120°（即轮换 $x\to y\to z\to x$），以及对立方体中心的点反射 $\mathbf{p}\mapsto(a,a,a)-\mathbf{p}$，两者都把框架和直线 OO' 映射到自身。所以它们不会改变任何绕 OO' 的转动惯量。旋转把 OA 带到 OB 和 OC，而反射再把这三根杆带到 $O'A'$、$O'B'$ 和 $O'C'$。这就是一端位于 O 或 O' 的六根杆，每根的转动惯量都是 $2ma^2/9$。同样地，$B'C$ 会被带到环绕立方体中部的“之字形” AB'、$B'C$、CA'、$A'B$、BC'、$C'A$ 中的其余五根杆，而这些杆每根的转动惯量都是 $5ma^2/9$。因此

$$I_{\text{框架}} = 6\cdot\frac{2ma^2}{9} + 6\cdot\frac{5ma^2}{9} = \frac{42ma^2}{9} = \frac{14ma^2}{3},$$

正如题目所求。

角加速度。现在框架只能绕固定直线 OO' 转动。轴承会提供垂直于该直线所需的任何力偶，所以只有外加力偶沿 OO' 的分量会令框架转动。这些力仍然构成力偶 $\mathbf{G} = amg(1,1,2)$，

而它对任何直线的力矩，就是它沿该直线的分量：

$$\mathbf{G}\cdot\mathbf{u}=\frac{amg(1+1+2)}{\sqrt{3}}=\frac{4amg}{\sqrt{3}}.$$

由绕固定轴转动的方程 $I\ddot{\theta}=\mathbf{G}\cdot\mathbf{u}$ 可得

$$\ddot{\theta}=\frac{4amg/\sqrt{3}}{14ma^2/3}=\frac{12g}{14\sqrt{3}\,a}=\frac{2\sqrt{3}\,g}{7a}.$$

由 O' 望向 O 时，它的转向是逆时针的，也就是绕方向 $\overrightarrow{OO'}$ 的右手旋转。

验算

- 六个力各有一个“拍档”：OA 配 $C'B$，AC' 配 $A'C$，$O'A$ 配 OA'。每一对都是大小相等、方向相反，并且作用线平行，所以合力为零。
- 框架对其中心具有立方对称性，所以绕每一条通过中心的轴，转动惯量都相同。绕通过中心并平行于 OC 的轴，四根垂直的杆贡献 $4m(a/\sqrt{2})^2=2ma^2$。八根水平的杆每根贡献 $\frac{ma^2}{12}+\frac{ma^2}{4}=\frac{ma^2}{3}$。总和是 $\frac{14ma^2}{3}$，与上面的答案吻合，因为 OO' 同样通过中心。
- 数值上，取 $a=m=g=1$，对十二根杆以中点法求和，得出 $I=4.66667$ 及 $\ddot{\theta}=0.494872$，与 $2\sqrt{3}/7\approx0.494872$ 相符。

常见错误

- 把沿面对角线的力 $\sqrt{2}\,mg$ 化为分量时，忘记了因子 $1/\sqrt{2}$：每个力的分量大小是 mg，而不是 $\sqrt{2}\,mg$。
- 在第 (ii) 部分使用了整个力偶 $|\mathbf{G}|=\sqrt{6}\,amg$，而不是它沿固定轴的分量。
- 从一条不通过质心（centre of mass）的轴出发应用平行轴定理：这个定理必须经由质心，就像由 $2ma^2/9$ 到 $ma^2/18$ 的那一步。

STEP 之外

对于三维空间中的转动，转动惯量会变成一个 3×3 的对称矩阵（symmetric matrix），即惯量张量，而角动量（angular momentum）为 $\mathbf{L}=\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$。它的特征向量（eigenvector）就是主轴。正如第 (i) 部分的补充所示，物体一般不会绕着外加力偶的轴线开始转动。这个立方体框架是个很好的例子：绕每一条通过其中心的轴，它的转动惯量都相同，但对一

个角来说却并非如此。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）阐述了三维空间中的刚体运动，包括惯量张量。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。