详细解答

STEP III 1993，第 10 题

纯数学 · 矩阵变换

STEP III 1993，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

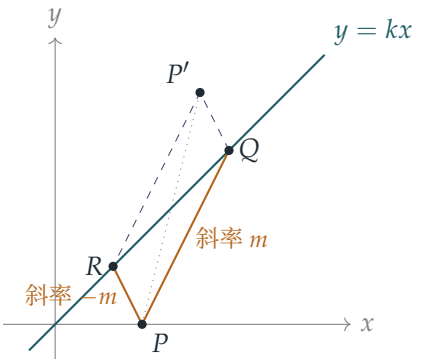
step.maths.org/questions/93-s3-q10

关键思路

这里每一步都是求两条直线的交点，所以各点的坐标只需每次解一条一次方程便可得到。平行四边形（parallelogram）则让我们不必再多做计算就得到 P'：在平行四边形 $PQP'R$ 中，两条对角线（diagonal）互相平分，所以以位置向量（position vector）表示时有 $P + P' = Q + R$。只要把 P' 写成一个矩阵（matrix）乘以 P，面积的问题就只是计算一个行列式（determinant）。

解答

全题都需要 $m^2 \neq k^2$：若 $m = \pm k$，则通过 P 的两条直线之中，有一条与 $y = kx$ 平行，永不与它相交（或者与它重合），这个作图便不成立。



（图中取 $m = 2$，$k = 1$ 及 $P = (1, 0)$。）

点 Q

通过 $P(x_1, y_1)$ 且平行于 $y = mx$ 的直线是 $y - y_1 = m(x - x_1)$。在 Q 点同时有 $y = kx$，所以

$$kx - y_1 = mx - mx_1 \quad \Longrightarrow \quad (m-k)x = mx_1 - y_1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{mx_1 - y_1}{m-k},$$

其中除以了 $m - k \neq 0$。再由 $y = kx$ 得

$$Q = \left(\frac{mx_1 - y_1}{m-k}, \frac{k(mx_1 - y_1)}{m-k} \right),$$

这正是所求。

点 R

通过 P 且平行于 $y = -mx$ 的直线，计算方法完全相同，只需把 m 换成 $-m$：

$$x = \frac{-mx_1 - y_1}{-m-k} = \frac{mx_1 + y_1}{m+k}, \qquad R = \left(\frac{mx_1 + y_1}{m+k}, \frac{k(mx_1 + y_1)}{m+k} \right).$$

点 P'

> ? **想一想** 怎样可以不再求任何直线的交点，就找到平行四边形的第四个顶点?

各顶点依次为 P, Q, P', R，所以 PP' 和 QR 是对角线。平行四边形的对角线互相平分，因此两者的中点相同：

$$\tfrac{1}{2}(P + P') = \tfrac{1}{2}(Q + R) \quad \Longrightarrow \quad P' = Q + R - P.$$

（等价地，$\overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{PR}$。）$Q$ 和 R 都在 $y = kx$ 上，所以最简单的做法是先把它们的 x 坐标相加。以 $m^2 - k^2$ 为公分母，

$$\begin{aligned} x_Q + x_R &= \frac{(mx_1 - y_1)(m+k) + (mx_1 + y_1)(m-k)}{m^2 - k^2} \\ &= \frac{(m^2x_1 + mkx_1 - my_1 - ky_1) + (m^2x_1 - mkx_1 + my_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} \\ &= \frac{2(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2}, \end{aligned}$$

并且 $y_Q + y_R = k(x_Q + x_R)$。因此，设 $P' = (x', y')$，则

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} - x_1 = \frac{(m^2 + k^2)x_1 - 2ky_1}{m^2 - k^2}, \\ y' &= \frac{2k(m^2x_1 - ky_1)}{m^2 - k^2} - y_1 = \frac{2km^2x_1 - (m^2 + k^2)y_1}{m^2 - k^2}. \end{aligned}$$

把 T 写成矩阵

两个坐标都是 x_1, y_1 的线性式，而且没有常数项，所以

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M} = \frac{1}{m^2 - k^2} \begin{pmatrix} m^2 + k^2 & -2k \\ 2km^2 & -(m^2 + k^2) \end{pmatrix}.$$

面积

矩阵为 $\mathbf{M}$ 的线性映射（linear map）会把每个面积乘以 $|\det \mathbf{M}|$。从每一行抽出因子 $\frac{1}{m^2-k^2}$，

$$\det \mathbf{M} = \frac{-(m^2+k^2)^2 + 4k^2m^2}{(m^2-k^2)^2} = \frac{-\left(m^4 - 2m^2k^2 + k^4\right)}{(m^2-k^2)^2} = \frac{-(m^2-k^2)^2}{(m^2-k^2)^2} = -1.$$

所以 $|\det \mathbf{M}| = 1$，每个区域都被映射到面积相同的区域，这正是所求。负号告诉我们 T 会把定向（orientation）反转，正如反射（reflection）一样：一个以逆时针方向描出的图形，其像是以顺时针方向描出的。

? **想一想** 能否用一幅图画说明 T 在做甚么？

可以。PP' 的中点等于 QR 的中点，而后者在 $y = kx$ 上；而且 $y = kx$ 上的点都固定不动（在那里 $Q = R = P$）。解 $\mathbf{Mv} = -\mathbf{v}$ 得出一行 $2m^2x - 2ky = 0$，所以被 T 反转的向量就是 (k, m^2) 的倍数。因此 T 是一个斜反射（skew reflection）：它以直线 $y = kx$ 为镜作反射，但反射的方向是沿 (k, m^2)，而不是垂直于该直线。与任何反射一样，它满足 $\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$，这也与作图吻合：从 P' 出发会得到相同的 Q 和 R，于是回到 P。

验算

- 取 $m = 2$，$k = 1$，$P = (1, 0)$：$Q = (2, 2)$，$R = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$，所以 $P' = (\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$。矩阵是 $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$，它把 $(1, 0)$ 送到 $(\frac{5}{3}, \frac{8}{3})$，而它的行列式是 $\frac{1}{9}(-25 + 16) = -1$。
- 直线上的点 (t, kt) 应该固定不动：$x' = \frac{(m^2+k^2)t - 2k^2t}{m^2-k^2} = t$。✓
- $\mathbf{M}$ 的迹（trace）是 0，行列式是 -1，所以它的特征值（eigenvalue）是 ± 1，与反射应有的情况相符。
- 我们以有理数精确运算，随机选取约 3000 组 m、k 和 P，核对了以上所有公式，以及三角形面积保持不变这一点。

常见错误

- 取 $P' = Q + R$ 或 $P' = P + Q + R$，而不是 $Q + R - P$。字母的次序 $PQP'R$ 已告诉你哪些顶点互为对顶点。
- 由 $\det \mathbf{M} = -1$ 推断面积变成负数。面积的比例因子是 $|\det \mathbf{M}|$；正负号只记录定向。

STEP 之外

一个线性映射若把某条直线上的每一点都固定，并把另一个方向反转，它就是一个对合（involution），即 $T^2 = I$。平常的正交反射是其中的特殊情况，即被反转的方向垂直于该直线；在这里，这种情况恰好在 (k, m^2) 垂直于 $(1, k)$ 时出现，也就是只有当 $k = 0$ 时（直线 $y = \pm mx$ 关于 x 轴对称，而不是关于 $y = kx$ 对称）。在大学里，这属于特征值与对角化（diagonalisation）的课题，在那里 T 在基（basis）$(1, k), (k, m^2)$ 之下可看成 $\mathrm{diag}(1, -1)$；它也属于把行列式理解为带正负号的体积比例因子的课题。斯特朗（Strang）的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）对这两个概念都有清晰的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。