详细解答

STEP III 1993，第 1 题

纯数学 · 弧长与体积

> **STEP III 1993，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s3-q1

关键思路

二倍角公式（double-angle formula）$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ 可把这条参数曲线（parametric curve）直接化为直角坐标（Cartesian）形式，而 θ 的取值范围则清楚告诉我们所得的是抛物线（parabola）的哪一段。至于长度，$\sqrt{1+16x^2}$ 是采用双曲代换（hyperbolic substitution）的典型信号，因为 $1+\sinh^2 u = \cosh^2 u$。只要留意到 P 的两端都落在旋转轴上，体积便只是一个普通的旋转体体积（volume of revolution）。

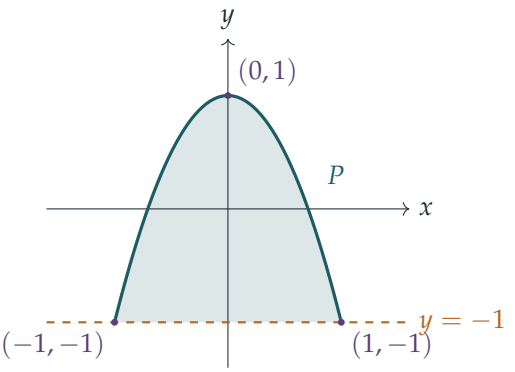
解答

曲线及其略图

由于 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ 而 $x = \sin\theta$，

$$y = 1 - 2x^2.$$

因此 P 上每一点都在抛物线 $y = 1 - 2x^2$ 上。当 θ 由 $-\pi/2$ 变到 $\pi/2$ 时，$x = \sin\theta$ 由 -1 稳定地递增至 1，每个值恰好取一次。所以 P 正是该抛物线上 $-1 \le x \le 1$ 的那段弧。它由 $(-1,-1)$ 上升至顶点（vertex）$(0,1)$，再下降至 $(1,-1)$，并且对称于 y 轴。



P 的长度

以直角坐标形式计算，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -4x$，所以

$$\text{长度} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x,$$

这里用到被积函数（integrand）是偶函数（even function）这个事实。（若用参数形式的公式 $\int \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}\theta$，代入 $x=\sin\theta$ 后会得到同一个积分。）

> **想一想** 哪一个代换可以令 $\sqrt{1+16x^2}$ 化简?

我们希望 $16x^2$ 成为一个 $\sinh^2$，所以设 $4x = \sinh u$。于是 $4\,\mathrm{d}x = \cosh u\,\mathrm{d}u$，而 $\sqrt{1+16x^2} = \cosh u$（取正值，因为 $\cosh u > 0$）。积分限 $x = 0, 1$ 变为 $u = 0$ 和 $u = \alpha$，其中 $\alpha = \sinh^{-1} 4$。注意 $\sinh\alpha = 4$ 及 $\cosh\alpha = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$。利用 $\cosh^2 u = \frac{1}{2}(1+\cosh 2u)$，

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 \sqrt{1+16x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^\alpha \cosh u \cdot \tfrac{1}{4}\cosh u\,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{4}\int_0^\alpha (1+\cosh 2u)\,\mathrm{d}u \\ &= \tfrac{1}{4}\Big[u + \tfrac{1}{2}\sinh 2u\Big]_0^\alpha = \tfrac{1}{4}(\alpha + \sinh\alpha\cosh\alpha) \\ &= \tfrac{1}{4}(\sinh^{-1}4 + 4\sqrt{17}). \end{aligned}$$

所以 P 的长度是 $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\sinh^{-1} 4$，正如题目所求。

体积

P 的两端都在直线 $y=-1$ 上，所以当 P 绕这条直线旋转时，会扫出一个封闭曲面。它所包围的立体，正是把 P 与 $y=-1$ 之间的阴影区域旋转所得的立体。在位置 x 处的切片是一个圆盘，其半径为

$$y - (-1) = 2 - 2x^2 = 2(1-x^2)\ (\geq 0 \text{ 当} |x| \leq 1).$$

因此

$$V = \pi \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)^2 \,\mathrm{d}x = 8\pi \int_{0}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\,\mathrm{d}x$$
$$= 8\pi\left(1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5}\right) = 8\pi \cdot \tfrac{8}{15} = \frac{64\pi}{15}.$$

验算

- 当 $\theta = 0$ 时得 $(0,1)$，当 $\theta = \pm\pi/2$ 时得 $(\pm 1, -1)$，与 $y = 1 - 2x^2$ 吻合。
- 长度 $\sqrt{17} + \frac{1}{4}\sinh^{-1} 4 \approx 4.6468$ 应该略大于由 $(\pm 1, -1)$ 到 $(0,1)$ 的两条直线弦的总长度，即 $2\sqrt{5} \approx 4.472$。事实确是如此。用中点法则（midpoint rule）在 $[-\pi/2, \pi/2]$ 上计算 $\int \sqrt{\cos^2\theta + 4\sin^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$，同样得到 4.64678。
- 帕普斯定理（Pappus's theorem）：该区域的面积为 $\int_{-1}^{1}(2 - 2x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$，其形心（centroid）在旋转轴上方 $\frac{4}{5}$ 处。所以 $V = 2\pi \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{64\pi}{15} \approx 13.404$，这也与数值积分的结果相符。

常见错误

- 误把曲线绕 x 轴旋转，用了半径 y 而不是 $y + 1$。
- 忘记了 $\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cosh u\,\mathrm{d}u$ 中的因子 $\frac{1}{4}$，或者没有把 $\sinh 2\alpha$ 化简，未有写成 $2\sinh\alpha\cosh\alpha = 8\sqrt{17}$。

STEP 之外

弧长（arc length）让我们初次窥见曲线的微分几何（differential geometry）。如果以弧长 s 来量度曲线上的位置，速率便恒为 1，而方向随 s 转动的快慢就是曲率（curvature）。对抛物线 $y = 1 - 2x^2$ 而言，曲率在顶点处最大。像上面那样的双曲代换，在大学一年级的微积分中随处可见。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）收录了更多这种风格的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。