详细解答

STEP II 1993，第 9 题

纯数学 · 复数的辐角

> **STEP II 1993，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q9

关键思路

按照 $0 \le \arg z < 2\pi$ 的约定，“虚部（imaginary part）为正”即是“辐角（argument）严格介乎 0 与 π 之间”。复数（complex number）相加就是向量（vector）相加，而若干个全部指向同一个开半平面（open half-plane）的向量，其和仍然留在该半平面内；只要旋转一下，使 z_1 或 z_3 落在实轴上，题目的不等式就正正是这个事实。至于最后一部分，积的辐角等于各辐角之和（可相差 2π 的倍数），而刚证明的不等式把两者之差严格困在 0 与 2π 之间。

解答

虚部为正

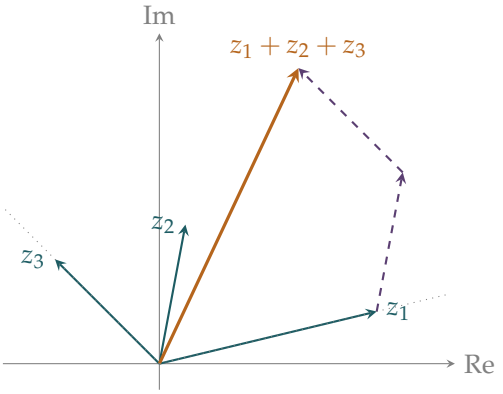
设 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$，其中 $r > 0$ 且 $0 \le \theta < 2\pi$。那么 $\operatorname{Im} z = r\sin\theta > 0$ 当且仅当 $\sin\theta > 0$，而在 $[0, 2\pi)$ 上，这当且仅当

$$0 < \arg z < \pi.$$

所以 z 位于上半平面（upper half-plane），而它的辐角永不等于 0 或 π（否则 z 便是实数）。

图示

设 $\theta_k = \arg z_k$，于是 $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \pi$。把 z_1、z_2、z_3 画成由原点出发的箭嘴；然后把它们首尾相接，便到达 $z_1 + z_2 + z_3$。



路径的每一步相对于前一步都是逆时针转向（因为 $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$），而且每一步都指向上半平面。路径起初沿着角度为 θ_1 的射线前进，然后向它的左方弯曲，所以终点严格位于该射线的逆时针方向；从另一端回望，路径的最后一步角度为 θ_3，而在此之前的一切都位于角度为 θ_3 的射线的顺时针方向。所以和位于角度为 θ_1 与 θ_3 的两条射线之间的楔形区域内。

要把这个想法严格写出来，可乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}$，即把所有东西顺时针旋转 θ_1：

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}(z_1+z_2+z_3) = r_1 + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)} + r_3\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_3-\theta_1)},$$

其中 $r_k = |z_k| > 0$。第一项是正实数，其余两项的角度都在 $(0,\pi)$ 内，所以虚部为正。因此右边的虚部为正，它的辐角 α 满足 $0 < \alpha < \pi$。于是 $\theta_1 + \alpha$ 是 $z_1+z_2+z_3$ 的一个辐角，而由于 $\theta_1 < \theta_1 + \alpha < \theta_1 + \pi < 2\pi$，这正是落在 $[0,2\pi)$ 范围内的那个辐角。所以 $\arg(z_1+z_2+z_3) > \theta_1$。

同样地，乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_3}$ 得 $r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_3)} + r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_3)} + r_3$，其中首两个角度都在 $(-\pi,0)$ 内，所以这个数的虚部为负，可以写成 $\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}$，其中 $0 < \beta < \pi$。于是 $z_1+z_2+z_3 = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_3-\beta)}$，其中 $-\pi < \theta_3 - \beta < \theta_3 < \pi$。和的虚部为正，所以它的辐角在 $(0,\pi)$ 内，并且与 $\theta_3 - \beta$ 相差 2π 的倍数；由于两个数都在长度为 2π 的区间 $(-\pi,\pi)$ 内，它们必定相等。所以 $\arg(z_1+z_2+z_3) = \theta_3 - \beta < \theta_3$，综合起来就是

$$\arg z_1 < \arg(z_1+z_2+z_3) < \arg z_3.$$

积与和

设 $\varphi = \arg(z_1+z_2+z_3)$，由上一部分可知 $\theta_1 < \varphi < \theta_3$。复数相乘时辐角相加，所以

$$z_1z_2z_3 = r_1r_2r_3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)},$$

而 $\arg(z_1z_2z_3)$ 就是 $[0,2\pi)$ 内与 $\theta_1+\theta_2+\theta_3$ 相差 2π 的倍数的那个数。

想一想 和 $\theta_1+\theta_2+\theta_3$ 可以是 $(0,3\pi)$ 内的任何数，所以我们不知道应该减去 2π 的哪一个倍数。怎样才可以避开这个问题，根本不必知道?

我们不必知道：只需要知道，假如 $\arg(z_1z_2z_3)=\varphi$，那么

$$D=\theta_1+\theta_2+\theta_3-\varphi$$

是 2π 的倍数。现在利用 $\theta_1<\varphi<\theta_3$ 来估计 D 的上下界：

$$D>\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_3=\theta_1+\theta_2>0,$$
$$D<\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_1=\theta_2+\theta_3<2\pi,$$

第一行用到 $\theta_k>0$，第二行用到 $\theta_k<\pi$。所以 $0<D<2\pi$，而严格介乎 0 与 2π 之间并没有 2π 的倍数。因此 $\arg(z_1z_2z_3)$ 永不等于 $\arg(z_1+z_2+z_3)$。

验算

以图中的例子 $z_1=2.5+0.6\mathrm{i}$、$z_2=0.3+1.6\mathrm{i}$、$z_3=-1.2+1.2\mathrm{i}$ 来说，三个辐角约为 0.236、1.385 和 2.356，而 $\arg(z_1+z_2+z_3)=\arg(1.6+3.4\mathrm{i})\approx1.131$，确实介乎第一个与最后一个之间。以 200 000 组随机选取的三个复数（模（modulus）介乎 e^{-4} 与 e^{4} 之间）作测试，两条不等式和 $0<D<2\pi$ 每一次都成立，而积与和从未指向同一方向。

要明白上半平面这个条件为何重要，可试试 $z_1=z_2=z_3=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$，即把大小次序放宽至容许相等：积是 1，而和指向 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ 的方向，与 $D=4\pi/3$ 吻合。若让三个角度都趋近 π，D 就会被推向 2π，可见 $\theta_k<\pi$ 这个上界确实发挥了作用。

常见错误

- 直接写 $\arg(z_1z_2z_3)=\theta_1+\theta_2+\theta_3$：只要这个和等于或大于 2π，这就是错的。我们只能说两者在模 2π 的意义下相等。
- 声称 $\arg(z_1+z_2+z_3)$ 是各个 θ_k 的某种平均值。事实并非如此（模的大小有影响）；真正成立的只是它严格介乎 θ_1 与 θ_3 之间。

STEP 之外

第一个事实其实是说，开半平面（事实上任何角度小于 π 的楔形区域）是一个凸锥（*convex cone*）：其中的向量的正系数组合仍然留在其中。凸锥在线性规划（linear programming）和最优化（optimisation）中占有核心地位；而最后一部分要设法绕过的 arg 的多值性（multivaluedness），在复分析（complex analysis）的入门课程中会引出支割线（branch

cut）和复对数（complex logarithm）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）以优美的几何方式阐述了这两个概念。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。