详细解答

STEP II 1993，第 8 题

纯数学 · 以数学归纳法证明算术几何平均不等式

STEP II 1993，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q8

本题在 *Beyond STEP* 第 3.2 节倒过来的 *AM–GM* 中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/am-gm-backwards.html

关键思路

两项的不等式（inequality）其实只是说一个平方必定非负。要由 2^m 项推到 2^{m+1} 项，可把整列数分成长度各为 2^m 的两半，对每一半使用归纳假设（induction hypothesis），然后对两个半列的平均数使用两项的不等式。这样只证明了项数是 2 的幂时的算术平均—几何平均不等式（AM–GM）；最后一部分用一个巧妙的技巧（出自柯西（Cauchy））补上缺口：用这列数本身的平均数（mean）来填充这列数，这样既不改变平均数，也不影响乘积的任何要紧之处。

解答

两项的情况

展开得

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - a_1a_2 = \frac{a_1^2+2a_1a_2+a_2^2-4a_1a_2}{4} = \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2 \geq 0,$$

所以 $a_1a_2 \leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$，而且等号恰好在 $a_1 = a_2$ 时成立。留意这个结果对任何两个正数都成立；下文我们会把它用在 a_1 和 a_2 以外的数上。

归纳法

设 $P(m)$ 为以下命题：$(*)$ 对每一列 2^m 个正数都成立。$m = 1$ 的情况就是刚刚证明的两项不等式。

现在假设 $P(m)$ 成立，并取 2^{m+1} 个正数 $a_1, \ldots, a_{2^{m+1}}$。记 $N = 2^m$，把它们分成各有 N 项的两半，其平均数分别为

$$X = \frac{a_1 + \cdots + a_N}{N}, \qquad Y = \frac{a_{N+1} + \cdots + a_{2N}}{N}.$$

对每一半应用 $P(m)$，得

$$a_1 \cdots a_N \le X^N \qquad \text{及} \qquad a_{N+1} \cdots a_{2N} \le Y^N.$$

这里所有的量都是正数，所以可以把这两个不等式相乘：

$$a_1 \cdots a_{2N} \le X^N Y^N = (XY)^N.$$

由于 X 和 Y 都是正数，两项的不等式给出 $XY \le \left(\frac{X+Y}{2}\right)^2$。因为 $t \mapsto t^N$ 在 $t > 0$ 时是递增（increasing）的，把两边同时取 N 次方后，不等号的方向不变：

$$(XY)^N \le \left(\frac{X+Y}{2}\right)^{2N}.$$

最后，$\dfrac{X+Y}{2} = \dfrac{(a_1 + \cdots + a_N) + (a_{N+1} + \cdots + a_{2N})}{2N}$ 正是全部 $2N = 2^{m+1}$ 个数的平均数。把以上各个不等式合起来，得

$$a_1 \cdots a_{2^{m+1}} \le \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)^{2^{m+1}},$$

这就是 $P(m+1)$。根据归纳法（induction），$(*)$ 对所有正整数 m 都成立。

想一想 像这样把两个不等式相乘，是否合理?

若 $0 < p \le q$ 且 $0 < r \le s$，则 $pr \le qr \le qs$，当中先后用到 r 和 q 是正数。没有正数这个条件，结论便可能不成立（例如 $-3 \le 1$ 及 $-3 \le 1$，但 $9 > 1$），这就是条件 $a_i > 0$ 如此重要的原因。

填充至 2 的幂

题目印出的定义是 $b_1 = a_2$，这必定是 $b_1 = a_1$ 的误印：我们取 $b_i = a_i$（$1 \le i \le n$）及 $b_i = A$（$n < i \le 2^m$）。每个 b_i 都是正数（因为 A 是若干正数的平均数）。它们的和是

$$b_1 + \cdots + b_{2^m} = (a_1 + \cdots + a_n) + (2^m - n)A = nA + (2^m - n)A = 2^m A,$$

所以各 b_i 的平均数恰好是 A。它们的乘积是 $a_1 \cdots a_n\, A^{2^m-n}$。因此对各 b_i 应用 $(*)$，便得

$$a_1 \cdots a_n\, A^{2^m-n} \le A^{2^m},$$

这正是所要证明的。

算术平均—几何平均不等式

给定任何正整数 n，选取 m 使得 $2^m > n$（由于 $2^m \to \infty$，这是办得到的），于是上一步适用。两边除以正数 A^{2^m-n}，得

$$a_1 \cdots a_n \le A^n.$$

两边都是正数，而 $t \mapsto t^{1/n}$ 在 $t > 0$ 上递增，所以取 n 次方根，得

$$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \le A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

这就是算术平均—几何平均不等式。（假如 n 刚好是 2 的幂，我们也可以直接引用 $(*)$，但选取 $2^m > n$ 便毋须另外分情况处理。）

验算

试取 $n = 3$，$a = (1,2,6)$：$A = 3$，而取 $m = 2$ 时，填充后的一列数是 $(1,2,6,3)$，其平均数是 3，乘积是 $36 \le 3^4 = 81$；除以 3 得 $12 \le 27 = A^3$，所以 $\sqrt[3]{12} \approx 2.29 \le 3$。此外，当所有 a_i 都相等时，所用到的每个不等式都变成等式，这与预期相符。用电脑以精确的有理数运算，对数千列随机数检验 $m \le 6$ 时的 $(*)$ 以及 $n \le 40$ 时的最终不等式，并没有发现任何反例。

常见错误

- 把归纳假设一次过用在全部 2^{m+1} 项上：归纳假设只涵盖长度为 2^m 的数列，所以必须分成两半。
- 忘记检查填充后的一列数的平均数仍然是 A；这正是用 A 而不用其他数来填充的全部意义所在。
- 取 n 次方根或作除法时，没有指出有关的量都是正数。

STEP 之外

这种“向前—向后”归纳法就是柯西对算术平均—几何平均不等式的证明：先对 2 的幂证明，再回头降到每一个 n。算术平均—几何平均不等式也是琴生不等式（Jensen's inequality）

应用于凹函数（concave function）ln 时的特殊情况，而一整族的幂平均（power-mean）不等式、赫尔德（Hölder）不等式和闵可夫斯基（Minkowski）不等式，都是由同样的想法发展出来的；这些都是大学一年级分析学（analysis）的基本工具。Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）从一开始就运用这类不等式，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题）则提供更多 STEP 风格的练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。