详细解答

# STEP II 1993，第 7 题

纯数学 • 模 5 的无穷递降法

> **STEP II 1993，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q7

## 关键思路

等式右边是 5 的倍数，所以改以模（modulo）5 来考虑，方程便化为一个小规模的有限验算：平方数模 5 只可能是 0、1 或 4 $(\mathrm{mod}\ 5)$。一旦迫使 $a$ 和 $b$ 都是 5 的倍数，方程便迫使 $c$ 也是 5 的倍数，而把各数全部除以 5 就得到一个更小的解。非零整数不可能无止境地被 5 整除，这正是费马（Fermat）的无穷递降法（infinite descent）。

## 解答

### $a$ 和 $b$ 可被 5 整除

把模 5 的每个剩余（residue）逐一平方：

| $x\ (\mathrm{mod}\ 5)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2\ (\mathrm{mod}\ 5)$ | 0 | 1 | 4 | 4 | 1 |
| $2x^2\ (\mathrm{mod}\ 5)$ | 0 | 2 | 3 | 3 | 2 |

所以 $b^2 \equiv 0, 1$ 或 4，而 $2a^2 \equiv 0, 2$ 或 3 $(\mathrm{mod}\ 5)$。由于 $5c^2 \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 5)$，我们需要

$$2a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 5.$$

现在列出所有组合：

| $2a^2 + b^2$ | $b^2 \equiv 0$ | $b^2 \equiv 1$ | $b^2 \equiv 4$ |
|---|---|---|---|
| $2a^2 \equiv 0$ | **0** | 1 | 4 |
| $2a^2 \equiv 2$ | 2 | 3 | 1 |
| $2a^2 \equiv 3$ | 3 | 4 | 2 |

表中唯一等于 0 的一格，就是 $2a^2 \equiv 0$ 且 $b^2 \equiv 0$ 的那一格。由第一个表可见，只有当 $x \equiv 0$ 时才有 $x^2 \equiv 0 \pmod 5$（换句话说，5 是质数（prime），所以 $5 \mid x^2$ 蕴含 $5 \mid x$）。因此 $a \equiv 0$ 且 $b \equiv 0 \pmod 5$：$a$ 和 $b$ 都可被 5 整除，这正是所要证明的。

**唯一的解是 $a = b = c = 0$**

设 $a = 5p$ 及 $b = 5q$，其中 $p, q$ 为整数。代入后得

$$25(2p^2 + q^2) = 5c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 = 5(2p^2 + q^2).$$

所以 $5 \mid c^2$，而由于 5 是质数，故 $5 \mid c$。设 $c = 5r$。于是 $25r^2 = 5(2p^2 + q^2)$，即

$$2p^2 + q^2 = 5r^2.$$

这又是原来的方程。所以若 $(a, b, c)$ 是一个解，则三个数都可被 5 整除，而且 $(a/5,\ b/5,\ c/5)$ 也是一个整数解。

> ? **想一想** 为甚么“可以一直除以 5”就迫使所有数都等于零?

重复运用这一步。从一个解 $(a, b, c)$ 出发，经过 $n$ 步之后，我们得到整数解 $(a/5^n,\ b/5^n,\ c/5^n)$，所以 $5^n$ 整除 $a$、$b$ 和 $c$ 每一个，而且这对每一个 $n \geq 1$ 都成立。

然而，非零整数 $m$ 只能被 5 整除有限次：若 $5^n \mid m$ 且 $m \neq 0$，则 $5^n \leq |m|$，而当 $n$ 足够大时这便不成立。所以 $a$、$b$、$c$ 没有一个可以是非零的。

同一个论证也可以写成递降的形式：假设存在 $c \neq 0$ 的解，并从中选取 $|c|$ 为正数而又尽可能小的一个。那么 $(a/5, b/5, c/5)$ 也是一个解，并且 $0 < |c/5| < |c|$，矛盾。所以 $c = 0$，于是 $2a^2 + b^2 = 0$ 迫使 $a = b = 0$，因为两项都是非负的。

因此，唯一的整数解是 $a = b = c = 0$。

## 验算

- 逐一检查全部 25 对剩余 $(a, b) \bmod 5$：只有 $(0, 0)$ 使得 $2a^2 + b^2 \equiv 0$。
- 以电脑搜索所有 $|a|, |b| \leq 300$，发现 $2a^2 + b^2 = 5c^2$ 除了 $a = b = c = 0$ 之外并无其他解。
- 试与 $a^2 + b^2 = 5c^2$ 比较，这个方程确实有非平凡解，例如 $(1, 2, 1)$：在这情况下 $1 + 4 \equiv 0 \pmod 5$，所以第一部分的剩余论证不再成立，而这正是应有的结果。

## 常见错误

- 没有说明理由，就由 $5 \mid a^2$ 推断 $5 \mid a$。这个结论是对的，因为 5 是质数（或可由表得出），但必须写明。
- 忘记证明 $c$ 同样可被 5 整除。缺少这一步，$(a/5, b/5, c/5)$ 就未必是整数解，递降也就无从开始。
- 写到“可以再除以 5”就停笔。必须说明为甚么重复整除会迫使各数为零，证明才算完整。

## STEP 之外

这就是费马的*无穷递降法*，同一方法可以证明 $\sqrt{2}$ 是无理数，以及 $x^4 + y^4 = z^2$ 没有非平凡解。像 $2a^2 + b^2 = 5c^2$ 这类方程，在数论中有系统的研究：勒让德（Legendre）定理以二次剩余（quadratic residue）为工具，给出 $Ax^2 + By^2 = Cz^2$ 有非平凡整数解的确切条件。在本题中，障碍在于 $-2$ 不是模 5 的平方数。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 一书涵盖同余（congruence）、二次剩余和递降法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。