详细解答

STEP II 1993，第 6 题

纯数学 · 矩阵代数的反例

> **STEP II 1993，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/93-s2-q6

本题在 *Beyond STEP* 第 7.1 节对矩阵不成立的法则中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/matrix-rules.html

关键思路

每一个断言对实数而言都是成立的，所以这道题其实是在问：普通代数里的哪些习惯，换成矩阵（matrix）之后仍然管用。有两件事会失效：矩阵乘法不一定可交换（commute），而且两个非零矩阵的乘积可以是零矩阵。只要精心挑选一对非常简单的矩阵，就能解决 (i) 和 (ii)；伴随矩阵（adjugate matrix）解决 (iii)；而一个重“根”再加上一点幂零（nilpotent）的变化，就解决 (iv)。

解答

以下一律以 $\mathbf{I}$ 表示 2×2 单位矩阵（identity matrix），以 $\mathbf{0}$ 表示零矩阵。

第 (i) 部分

错误。取

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},$$

两者皆非零。于是

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{BA}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}.$$

想一想 怎样才能找出这样的反例（counterexample），而不是单靠瞎猜？

我们想要 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$，所以 $\mathbf{B}$ 的每一列都必须被 $\mathbf{A}$ 化为零。上面的矩阵 $\mathbf{A}$ 会把任何形如 $(0, y)^{\mathsf{T}}$ 的向量化为零，因此我们可以把 $\mathbf{B}$ 的各列都取成这个形式。然后只需检查 $\mathbf{BA}$ 会不会碰巧也等于零；采用最显而易见的选择时，它并不等于零。

第 (ii) 部分

错误。小心展开，并保持每个乘积的次序，

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2,$$

所以该断言恰好在 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ 时成立。第 (i) 部分的两个矩阵不可交换，因此它们就是一个反例：在那里 $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = -\mathbf{BA} \neq \mathbf{0}$。具体计算，

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中用到 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{0}$。

第 (iii) 部分

正确。我们证明两个方向。

*若 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 有非零解，则 $\det \mathbf{A} = 0$。*我们证明其逆否命题（contrapositive）。假设 $\det \mathbf{A} \neq 0$。那么 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在，而由 $\mathbf{AX} = \mathbf{0}$ 可得 $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$。所以唯一的解是零矩阵。

*若 $\det \mathbf{A} = 0$，则存在非零解。*设

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

（即 $\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵）。乘出来，

$$\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} = (\det \mathbf{A})\,\mathbf{I} = \mathbf{0}.$$

$\mathbf{X}$ 的元素就是 $\mathbf{A}$ 的元素重新排列，并改变了其中一些正负号，而 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$，所以 $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$。证明至此完成。请留意这里用到了 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ 这个假设：正是它保证伴随矩阵非零。

第 (iv) 部分

错误。对数而言，二次方程（quadratic）最多有两个根，但这个事实的证明用到“若 $pq = 0$，则 $p = 0$ 或 $q = 0$”，而第 (i) 部分刚刚说明了这一点对矩阵并不成立。因此，我们应该找

一个可以因式分解成完全平方的二次式。取 $\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{B} = \mathbf{I}$，两者皆非零。由于 $\mathbf{I}$ 与任何矩阵都可交换，

$$\mathbf{X}^2 - 2\mathbf{X} + \mathbf{I} = (\mathbf{X} - \mathbf{I})^2,$$

所以我们需要 $(\mathbf{X} - \mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$。任何满足 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ 的矩阵 $\mathbf{N}$ 都可以用作 $\mathbf{X} - \mathbf{I}$，而这样的矩阵有无限多个。对每个实数 t，设

$$\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\mathbf{X}_t^2 - 2\mathbf{X}_t + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

每个 $\mathbf{X}_t$ 都非零，而不同的 t 值给出不同的矩阵。所以这个方程有无限多个解，而不是最多两个。

想一想 $\mathbf{A} = -2\mathbf{I}$、$\mathbf{B} = \mathbf{I}$ 有甚么特别之处吗?

其实没有。取 $\mathbf{A} = -2\lambda\mathbf{I}$ 和 $\mathbf{B} = \lambda^2\mathbf{I}$（$\lambda \neq 0$ 为任意数），则每个 $\mathbf{X} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}$（其中 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$）都是解。幂零矩阵本身就构成一个庞大的族：对所有实数 p、q，$\begin{pmatrix} pq & -p^2 \\ q^2 & -pq \end{pmatrix}$ 的平方都是 $\mathbf{0}$。关键只在于这个二次式可以分解成两个矩阵的乘积，而这样的乘积等于零的方式，远比数的情况多。

验算

亲手把每个反例乘出来：在 (i) 中，$\mathbf{AB}$ 的每个元素都是 0，而 $\mathbf{BA}$ 的左下角有一个 1。恒等式 $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ 已用 1000 对随机整数矩阵测试过，而 $\mathbf{A}\operatorname{adj}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 且 $\operatorname{adj}\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ 亦已用 2000 个随机奇异矩阵（singular matrix）测试过。在 (iv) 中，试取 $t = 3$：$\mathbf{X}_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $\mathbf{X}_3^2 - 2\mathbf{X}_3 + \mathbf{I} = \mathbf{0}$。

常见错误

- 展开 $(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ 时，当作 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ 来处理。在 (ii) 中只写“错误”而不给出具体反例，得分甚少：题目要求的正是反例。
- 在 (iii) 中，只证明了“当且仅当”（if and only if）的其中一个方向。
- 在 (iv) 中，用求根公式或因式分解去“解”这个二次方程，然后断定 $\mathbf{X} = \mathbf{I}$ 是唯一的根。因式分解本身没有问题，但 $\mathbf{P}^2 = \mathbf{0}$ 并不意味着 $\mathbf{P} = \mathbf{0}$。

STEP 之外

2×2 实矩阵构成一个带有零因子的非交换环（*non-commutative ring with zero divisors*），而这道题的每一部分，都在考验一条在域（field）中成立、在这样的环中却失效的定律。第 (iii) 部分是线性代数（linear algebra）一条核心定理的 2×2 情形：一个方阵有非平凡的零空间（null space），当且仅当它的行列式（determinant）等于零。像 (iv) 中那些满足 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ 的矩阵称为幂零矩阵，是若尔当标准形（Jordan normal form）的关键组成部分。线性代数方面可参考 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*，环论（ring theory）方面可参考 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。