详细解答

STEP II 1993，第 5 题

纯数学 · 极坐标曲线与弧长

STEP II 1993，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q5

关键思路

R 处的直角让我们只需用 OQ 和小角 $\delta\theta$，便可从直角三角形 ORQ 读出小三角形 PQR 的每一条边长。取 $Q \to P$ 时的极限（limit），弦（chord）PQ 便变成切线（tangent）。对于这条螺线，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ 是 r 的常数倍，所以 $r\,\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$ 处处相同，而弧长（arc length）的被积函数（integrand）只是一个指数函数。

解答

曲线与半径之间的夹角

点 R 位于直线 OP（的延长线）上，而 $\angle ORQ$ 是直角。在直角三角形 ORQ 中，斜边（hypotenuse）是 $OQ = r + \delta r$，O 处的角是 $\delta\theta$，所以

$$QR = (r + \delta r)\sin\delta\theta, \qquad OR = (r + \delta r)\cos\delta\theta.$$

由于 $OP = r$，我们有 $PR = OR - OP = (r + \delta r)\cos\delta\theta - r$。三角形 PRQ 的直角在 R，所以

$$\tan\angle QPR = \frac{QR}{PR} = \frac{(r + \delta r)\sin\delta\theta}{(r + \delta r)\cos\delta\theta - r}.$$

当 $\delta\theta$ 很小时，我们有 $\sin\delta\theta = \delta\theta + O(\delta\theta^3)$ 和 $\cos\delta\theta = 1 + O(\delta\theta^2)$，所以

$$\tan\angle QPR = \frac{r\,\delta\theta + \delta r\,\delta\theta + \cdots}{\delta r + O(\delta\theta^2)} = \frac{r\dfrac{\delta\theta}{\delta r} + \delta\theta + \cdots}{1 + O\left(\dfrac{\delta\theta^2}{\delta r}\right)},$$

其中省略号代表与已列出的项相比很小的项。当 $Q \to P$ 时，δr 和 $\delta\theta$ 都趋向 0，且 $\delta\theta/\delta r \to \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}r$。所以 $\delta\theta^2/\delta r = \delta\theta \cdot (\delta\theta/\delta r) \to 0$，同时 $\delta\theta \to 0$。因此

$$\tan\angle QPR \to r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}.$$

想一想 为甚么 $\angle QPR$ 的极限就是曲线与 OP 相交的角度?

角 QPR 是弦 PQ 与通过 P 的半径线之间的夹角。当 $Q \to P$ 沿曲线移动时，弦 PQ 便变成 P 处的切线。所以在极限之下，$\angle QPR$ 变成切线与 OP 之间的夹角，这正是“曲线与 OP 相交的角度”的意思。因此该角是

$$\tan^{-1}\left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}\right),$$

正如所求。

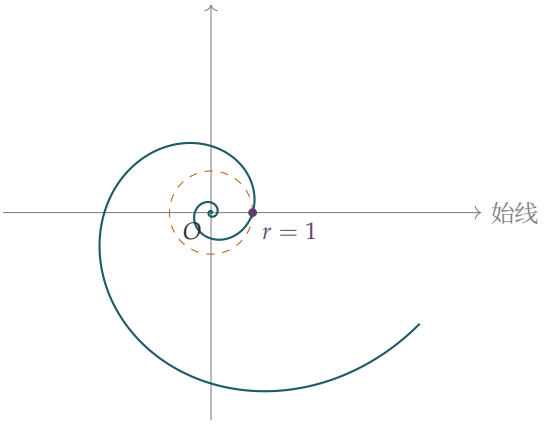
等角螺线

对于 $r = \mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}$，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \cot\alpha\,\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha} = r\cot\alpha, \qquad \text{所以} \qquad r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = \frac{r}{r\cot\alpha} = \tan\alpha.$$

因为 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，角 α 位于 $\tan^{-1}$ 的值域之内，所以 $\tan^{-1}(\tan\alpha) = \alpha$。这个结果与 θ 无关，所以螺线在每一点都以角 α 与每条半径线相交。

草图。由于 $\cot\alpha > 0$，r 随 θ 稳定地增加。每转一整圈，r 便乘以固定的因子 $\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}$。当 $\theta \to -\infty$ 时，$r \to 0$，所以曲线绕原点无限多圈，却永远到不了原点。当 $\theta \to +\infty$ 时，它以逆时针方向向外盘旋。当 $\theta = 0$ 时，它在 $r = 1$ 处与始线（initial line）相交。草图采用 $\cot\alpha = 0.3$。



虚线圆是 $r = 1$。螺线在圆内的部分就是那无限向内卷绕的一段。

弧长

利用题目给出的公式和 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = r\cot\alpha$,

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + r^2\cot^2\alpha = r^2\operatorname{cosec}^2\alpha, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha},$$

这里取正根，因为 s 随 θ 增加，而且 $\sin\alpha > 0$。

由 $r = 1$ 开始向外走的完整一圈，是从 $\theta = 0$ 到 $\theta = 2\pi$。它的长度是

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1}{\cot\alpha} = \sec\alpha\left(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1\right).$$

$r \le 1$ 的部分对应 $\theta \le 0$，即 $-\infty < \theta \le 0$。它的长度是反常积分（improper integral）

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^{\theta\cot\alpha}}{\sin\alpha}\,\mathrm{d}\theta = \lim_{T\to\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-T\cot\alpha}}{\sin\alpha\cot\alpha} = \sec\alpha,$$

因为 $\cot\alpha > 0$ 使得 $\mathrm{e}^{-T\cot\alpha} \to 0$。所以即使这部分绕原点无限多圈，它的总长度仍是有限的，就是 $\sec\alpha$。

验算

- 当 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ 时，我们有 $\cot\alpha \to 0$，螺线变成单位圆，而每条半径都与它成直角相交。一圈的长度是 $\sec\alpha(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1) \approx \sec\alpha\cdot 2\pi\cot\alpha = 2\pi\operatorname{cosec}\alpha \to 2\pi$，即圆周。
- 对 $\sec\alpha$ 有一个漂亮的几何验算：沿螺线由任意一点到原点的长度是 $r\sec\alpha$，这正是由该点到通过 O 且垂直于 OP 的直线的切线段长度。
- 数值上，取 $\alpha = 0.9$，把 2×10^5 条弦加起来，得出一圈的长度为 233.8349，内侧部分的长度为 1.608726。这些数值与 $\sec\alpha(\mathrm{e}^{2\pi\cot\alpha}-1)$ 和 $\sec\alpha$ 吻合，至少准确至八位有效数字。

常见错误

- 写下 $PR = \delta r$ 和 $QR = r\,\delta\theta$ 而不解释原因。两者都只在一阶近似下成立，而极限论证正是这道题要考核的地方。
- 计算内侧部分时在 $[0, 2\pi]$ 上积分，而不是在 $(-\infty, 0]$ 上积分。$r \le 1$ 的部分包含无限多圈，而不是一圈。

STEP 之外

等角螺线（equiangular spiral，又称对数螺线）是自相似（self-similar）的：把它按 $e^{2\pi\cot\alpha}$ 或任何因子缩放，都会得到旋转后的同一条曲线。用复数表示，它是 $z = e^{(\cot\alpha + i)\theta}$，即一条直线在指数映射下的像，而夹角恒定这一点，源于 exp 是保角（conformal）的（即它保持角度不变）。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把这幅图像阐述得非常精彩。一条无限卷绕的曲线竟有有限的长度，这让人初次尝到大学第一门分析课程中会遇到的反常积分与收敛（convergence）问题的滋味。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。