详细解答

STEP II 1993，第 4 题

纯数学 · 偏斜线与最接近距离

STEP II 1993，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q4

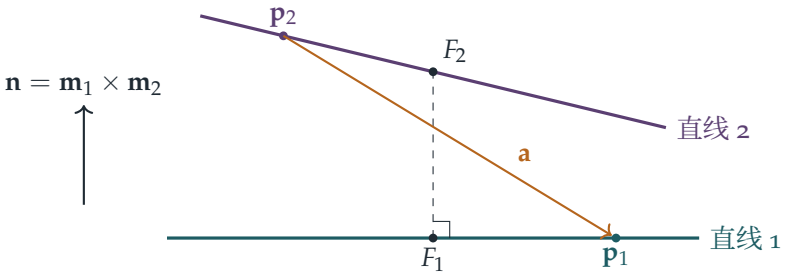
关键思路

由一条直线上的点连到另一条直线上的点的任何向量，沿公共法向量（common normal）$\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$ 的分量（component）都相同，因为沿任何一条直线移动，只会加上 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$ 的倍数，而这两个向量都与该法向量垂直。这个固定的分量就是最短距离。至于飞机的部分，窍门是在 A_2 的参考系（frame）中考虑：由 A_2 指向 A_1 的向量沿单一一条直线移动，所以最接近时的距离就是一点到一条直线的距离。

解答

两条直线之间的最短距离

设 $\mathbf{a} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$ 及 $\mathbf{n} = \mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2$，由于两条直线不平行，后者不是零向量，而且同时垂直于 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$。



草图显示了这两条直线（它们是异面直线（skew lines），所以不相交）、由 $\mathbf{p}_2$ 指向 $\mathbf{p}_1$ 的向量 $\mathbf{a}$，以及与 $\mathbf{n}$ 平行的公垂线（common perpendicular）F_1F_2。

由直线 2 上一点指向直线 1 上一点的一般向量是

$$\mathbf{d} = \mathbf{a} + t_1\mathbf{m}_1 - t_2\mathbf{m}_2.$$

由于 $\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{n} = 0$，它沿单位法向量（unit normal）$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|$ 的分量是

$$\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

无论 t_1, t_2 怎样选取，结果都一样。向量的长度不会小于它的任何一个分量，所以 $|\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}|$，而等号恰好在 $\mathbf{d}$ 与 $\mathbf{n}$ 平行时成立。等号确实可以成立：$\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{n}$ 不共面，所以它们构成一组基（basis），我们可以写成 $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{m}_1 + \beta\mathbf{m}_2 + \gamma\mathbf{n}$；取 $t_1 = -\alpha$、$t_2 = \beta$，便剩下 $\mathbf{d} = \gamma\mathbf{n}$。这个选择给出草图中的垂足 F_1, F_2。从图中看，最短距离就是 $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{n}$ 方向上的“高度”。因此最短距离是

$$|\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}}| = \frac{|(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)|}{|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|}.$$

第 (i) 部分

这里 $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$。把 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$ 换成它们的任何非零倍数，公式都不变，因为这些因子在分子和分母中互相约去，所以我们可以用 $(4, 3, 0)$ 和 $(0, -3, 1)$：

$$(4, 3, 0) \times (0, -3, 1) = (3, -4, -12), \qquad |(3, -4, -12)| = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13.$$

于是 $(1, 1, 1) \cdot (3, -4, -12) = -13$，所以最短距离是 $13/13 = 1$。

第 (ii) 部分

在时间 t，两架飞机分别位于 $\mathbf{p}_1 + v_1 t\,\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{p}_2 + v_2 t\,\mathbf{m}_2$，所以由 A_2 指向 A_1 的向量是

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{w}, \qquad \mathbf{w} = v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2.$$

由于 $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ 不平行，$\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$（除非两个速率都是零）。我们把飞行过程理解为包括所有时间，即 $t = 0$ 之前和之后。于是

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2t\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{w} + t^2|\mathbf{w}|^2,$$

这是 t 的二次式，首项系数为正。配方（completing the square）后得

$$|\mathbf{r}(t)|^2 = |\mathbf{w}|^2\Big(t + \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2}\Big)^2 + |\mathbf{a}|^2 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{w})^2}{|\mathbf{w}|^2},$$

所以最小值在 $t = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{w}/|\mathbf{w}|^2$ 时取得，其值为

$$d^2 = \frac{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|^2\,|v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2|^2 - [(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot (v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2)]^2}{|v_1\mathbf{m}_1 - v_2\mathbf{m}_2|^2},$$

这正是所求。从几何上看，d 是原点到直线 $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{w}$ 的距离，即 $|\mathbf{a}| \sin\theta$，其中 θ 是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{w}$ 之间的夹角。

第 (iii) 部分

先给出一个不需要任何代数运算的下界：在每一刻，A_1 都在直线 1 上，A_2 都在直线 2 上，所以由第 (i) 部分可知 $d \geq 1$。等号成立的话，两架飞机必须在同一时间分别位于垂足 F_1、F_2。

> **想一想** A_2 的机师真的可以做到这一点吗?

先求垂足。要求 $\mathbf{a} + t_1\mathbf{m}_1 - t_2\mathbf{m}_2$ 同时垂直于 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$，并利用 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}_1 = \frac{7}{5}$、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{m}_2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}$ 及 $\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{m}_2 = -\frac{9}{5\sqrt{10}}$，解这两条线性方程便得

$$t_1 = -\tfrac{20}{13}, \qquad t_2 = \tfrac{\sqrt{10}}{13}.$$

A_1 在时间 $t_1/v_1 < 0$ 位于 F_1，但当 $v_2 > 0$ 时，A_2 在时间 $t_2/v_2 > 0$ 才位于 F_2。这两个时间永远不可能相同：F_1 在 $\mathbf{p}_1$ 的后方，而 F_2 在 $\mathbf{p}_2$ 的前方。所以若 A_2 沿 $\mathbf{m}_2$ 的方向飞行，$d = 1$ 这个值是达不到的。要知道可以达到甚么值，我们利用第 (ii) 部分。

设 $v_2 = \sqrt{10}\,\lambda v_1$，所以 λ 是经过缩放的速率比。于是

$$\mathbf{w} = v_1\left(\tfrac{1}{5}(4,3,0) - \lambda(0,-3,1)\right) = \tfrac{v_1}{5}(4,\ 3+15\lambda,\ -5\lambda),$$

而因子 $\frac{v_1}{5}$ 在 d^2 的公式中会约去。利用 $|\mathbf{a}|^2 = 3$，

$$\mathbf{a}\cdot(4,3+15\lambda,-5\lambda) = 7+10\lambda, \qquad |(4,3+15\lambda,-5\lambda)|^2 = 25+90\lambda+250\lambda^2,$$

所以

$$d^2 = 3 - \frac{(7+10\lambda)^2}{25+90\lambda+250\lambda^2} = \frac{26+130\lambda+650\lambda^2}{25+90\lambda+250\lambda^2} = \frac{26}{5}\cdot\frac{1+5\lambda+25\lambda^2}{5+18\lambda+50\lambda^2}.$$

对最后一个分式 N/D 求导，导数的分子可以化简：

$$\begin{aligned} N'D - ND' &= (5+50\lambda)(5+18\lambda+50\lambda^2) - (1+5\lambda+25\lambda^2)(18+100\lambda) \\ &= 7+150\lambda+200\lambda^2 = (1+20\lambda)(7+10\lambda). \end{aligned}$$

所以，把 d^2 看成所有实数 λ 的函数时，它在 $\lambda = -\frac{7}{10}$ 取得极大值（此时 $\mathbf{a}\perp\mathbf{w}$ 而 $d=\sqrt{3}$），并在 $\lambda = -\frac{1}{20}$ 取得极小值，此时

$$d^2 = \frac{26}{5}\cdot\frac{1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}{5-\frac{9}{10}+\frac{1}{8}} = \frac{26}{5}\cdot\frac{13/16}{169/40} = 1.$$

这就是下界 $d = 1$，在 $v_2 = -\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$ 时达到，与由垂足求得的 t_2/t_1 吻合。

所以两架飞机最接近时可以相距 $d = 1$，即两条直线之间的最短距离，而不能再近。要做到这一点，A_2 的机师须沿直线 2 以 $-\mathbf{m}_2$ 的方向、以速率 $\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$ 飞行：用题目的记号，就

是 $v_2 = -\frac{v_1}{2\sqrt{10}}$，这是沿 $\mathbf{m}_2$ 的速度而不是速率。这样两架飞机便会在同一刻到达公垂线的两个垂足。这重现了第 (i) 部分的答案，相信这正是考官的原意。留意答案只取决于比值 v_2/v_1。

*关于正速率的备注。*如果 v_2 必须是真正的速率，即 $v_2 > 0$ 及 $\lambda > 0$，那么 $(1+20\lambda)(7+10\lambda) > 0$，而 d^2 对 v_2 严格递增：

$$d^2 \to \frac{26}{25} \quad \text{当} v_2 \to 0^+, \qquad d^2 \to \frac{13}{5} \quad \text{当} v_2 \to \infty.$$

按这种理解，并不存在最佳速率：机师飞得愈慢，效果愈好，最接近时的距离可以任意接近 $\frac{\sqrt{26}}{5} \approx 1.020$，即 $\mathbf{p}_2$ 到直线 $\mathfrak{l}$ 的距离，但永远达不到这个值。

验算

- (i) 中的公垂线：取 $t_1 = -\frac{20}{13}$、$t_2 = \frac{\sqrt{10}}{13}$ 时，连接两点的向量是 $\frac{1}{13}(-3,4,12)$，它与 $(3,-4,-12)$ 平行，长度恰好是 1。
- 用电脑对随机选取的速率以直接搜索法求 $|\mathbf{r}(t)|$ 的最小值，结果与 (ii) 中的公式吻合，误差在 10^{-6} 以内。电脑亦在 $[-2,2]$ 上扫描了 v_2/v_1：最小值是 $d^2 = 1.0000$，在 $v_2/v_1 \approx -0.1581 = -1/(2\sqrt{10})$ 时取得，而当 $v_2 > 0$ 时，d^2 由 1.04 开始上升。
- 极限情况：$v_2 = 0$ 时 A_2 是固定在 $\mathbf{p}_2$ 的一点，而 $3 - (\frac{7}{5})^2 = \frac{26}{25}$ 确实是 $\mathbf{p}_2$ 到直线 $\mathfrak{l}$ 的距离的平方。

常见错误

- 以“1，由第 (i) 部分可得”回答 (iii)，却没有检查两架飞机能否在同一刻到达公垂线的垂足。
- 忘记了 (ii) 中的公式不受 $\mathbf{w}$ 的缩放影响，结果带着 v_1 做了好几页代数运算。
- 在直线距离公式中漏掉绝对值，得出 -1。

STEP 之外

第 (ii) 部分是*正交投影*（orthogonal projection）的一个小例子：d 是 $\mathbf{a}$ 垂直于 $\mathbf{w}$ 的分量的长度，而 $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{w}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{w})^2 = |\mathbf{a}\times\mathbf{w}|^2$ 是格拉姆行列式（Gram determinant），即以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{w}$ 为边的平行四边形面积的平方。大学第一门线性代数课程中的最小二乘法（least squares）拟合，正是建基于同一个投影概念。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）对此有十分精彩的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。