详细解答

STEP II 1993，第 3 题

纯数学 · 里卡蒂微分方程

STEP II 1993，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/93-s2-q3

关键思路

两条方程都因为 y^2 项而成为非线性（nonlinear）方程，所以标准的一阶方程解法都不能直接套用。题目给出的代换（substitution）正是为了消去这个 y^2 项而设计的。在 (i) 中，把 y 写成 u'/u 的倍数，平方项便会互相抵消，剩下一条常系数的二阶线性方程。在 (ii) 中，$y = 1/x$ 刚好是一个精确解，而写成 $y = 1/x + 1/v$ 后，方程便化为关于 v 的一阶线性方程，可用积分因子（integrating factor）求解。

解答

第 (i) 部分

设 $y = -\dfrac{u'}{3u}$，其中 $u' = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。由商法则（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{u''}{3u} + \frac{(u')^2}{3u^2}, \qquad \text{而} \qquad 3y^2 = 3 \cdot \frac{(u')^2}{9u^2} = \frac{(u')^2}{3u^2}.$$

于是那些麻烦的项互相抵消：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 3y^2 = -\frac{u''}{3u}.$$

因此方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y - 3y^2 = -2$ 变成

$$-\frac{u''}{3u} + \frac{u'}{3u} = -2.$$

两边乘以 $-3u$（其中 $u \neq 0$，这本来就是 y 有定义所必需的），得

$$u'' - u' - 6u = 0.$$

辅助方程（auxiliary equation）为 $m^2 - m - 6 = (m-3)(m+2) = 0$，所以 $m = 3$ 或 $m = -2$，而

$$u = Ae^{3x} + Be^{-2x}$$

其中 A 和 B 为常数，且不同时为零。于是 $u' = 3Ae^{3x} - 2Be^{-2x}$，而

$$y = -\frac{u'}{3u} = \frac{2Be^{-2x} - 3Ae^{3x}}{3\left(Ae^{3x} + Be^{-2x}\right)}.$$

想一想 一阶方程应该只有一个任意常数（arbitrary constant）。为甚么我们会有两个?

其实只有 A 与 B 的比才有影响：把 u 乘以一个非零常数，并不会改变 u'/u。若 $A \neq 0$，把分子和分母同时除以 Ae^{3x}，并记 $K = B/A$：

$$y = \frac{2Ke^{-5x} - 3}{3\left(1 + Ke^{-5x}\right)} = \frac{2K - 3e^{5x}}{3\left(e^{5x} + K\right)},$$

其中 K 为任意常数。$A = 0$ 的情况给出常数解 $y = \frac{2}{3}$，它是这族解当 $K \to \infty$ 时的极限。取 $K = 0$ 则得另一个常数解 $y = -1$。作为验算，常数解满足 $-y - 3y^2 = -2$，即 $(3y-2)(y+1) = 0$。

第 (ii) 部分

设 $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{v}$。则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{v'}{v^2},$$

因此

$$\begin{aligned} x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -1 - \frac{x^2v'}{v^2}, \\ xy &= 1 + \frac{x}{v}, \\ x^2y^2 &= x^2\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xv} + \frac{1}{v^2}\right) = 1 + \frac{2x}{v} + \frac{x^2}{v^2}. \end{aligned}$$

把这三行相加，方程 $x^2y' + xy + x^2y^2 = 1$ 变成

$$1 - \frac{x^2v'}{v^2} + \frac{3x}{v} + \frac{x^2}{v^2} = 1, \qquad \text{即} \qquad -\frac{x^2v'}{v^2} + \frac{3x}{v} + \frac{x^2}{v^2} = 0.$$

两边乘以 v^2/x^2（其中 $x \neq 0$，这是方程本身的要求），得线性方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{3}{x}v = 1.$$

积分因子为 $\exp\left(-\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x\right) = x^{-3}$（在 $x > 0$ 或 $x < 0$ 其中一个区间上；我们可以略去绝对值符号，因为积分因子乘以一个常数后同样适用）。故此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{x^3}\right) = \frac{1}{x^3} \quad\Longrightarrow\quad \frac{v}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + c \quad\Longrightarrow\quad v = cx^3 - \tfrac{1}{2}x = \frac{x\left(Kx^2 - 1\right)}{2},$$

其中 c 为任意常数，$K = 2c$。所以

$$y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x\left(Kx^2 - 1\right)} = \frac{Kx^2 + 1}{x\left(Kx^2 - 1\right)},$$

其中 K 为任意常数。取 $K = 0$ 得 $y = -1/x$。这个代换假设了 $1/v$ 存在，所以遗漏了 $y = 1/x$ 本身（“$v = \infty$”）。它同样是一个解，因为 $x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 1 + 1 = 1$，而且它是这族解当 $K \to \infty$ 时的极限。

验算

- 在 (i) 中，当 $x = 0$ 时，解的值为 $y(0) = \dfrac{2K - 3}{3(1 + K)}$。当 $x \to +\infty$ 时，$y \to -1$；当 $x \to -\infty$ 时，$y \to \frac{2}{3}$（当 $K \neq 0$）。所以解由一个常数解走向另一个常数解，正如我们所料。
- 在 (ii) 中，取 $K = 1$ 及 $x = 2$：$y = \frac{5}{6}$，$y'(2) = -\frac{31}{36}$。于是 $x^2y' + xy + x^2y^2 = -\frac{31}{9} + \frac{5}{3} + \frac{25}{9} = 1$，符合要求。
- 我们以有限差分（finite differences）在数百个随机点及随机的 K 值上，对两个通解（general solution）作了数值验算。代入原方程所得的残差，在舍入误差范围内为零。

常见错误

- 在 (i) 的答案中保留两个常数 A、B，而没有留意到只有它们的比才有影响。
- 在 (ii) 中忘记了 x^2y^2 交叉项的因子 2，以致把 $3v/x$ 变成 $2v/x$，得出错误的积分因子。
- 遗漏了代换所无法得到的解 $y = 1/x$（或 (i) 中的 $y = \frac{2}{3}$）。

STEP 之外

形如 $y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$ 的方程称为里卡蒂方程（Riccati equation）。本题的两个技巧都是普遍适用的。代换 $y = -u'/(ru)$ 总能把里卡蒂方程化为二阶线性方程。而如果你知道一个特解（particular solution）y_1，则 $y = y_1 + 1/v$ 总能给出一条关于 v 的一阶线性方程。里卡蒂方程与二阶线性方程之间的这种联系，在量子力学（quantum mechanics）

和控制理论（control theory）中会再次出现。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教科书）中有关于里卡蒂方程的习题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。